

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO

VERONICA FAVATO BRUGUGNOLI

**OPÇÕES REAIS, OPERAÇÕES URBANAS E O MERCADO IMOBILIÁRIO NA  
CIDADE DE SÃO PAULO**

SÃO PAULO  
DEZEMBRO DE 2011

VERONICA FAVATO BRUGUGNOLI

**OPÇÕES REAIS, OPERAÇÕES URBANAS E O MERCADO IMOBILIÁRIO NA  
CIDADE DE SÃO PAULO**

Tese apresentada à Escola de Administração de  
Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio  
Vargas como requisito para obtenção do título de  
doutor em Administração de Empresas

Campo de Conhecimento:  
Mercados Financeiros e Finanças Corporativas

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman

SÃO PAULO

DEZEMBRO DE 2011

Favato Brugugnoli, Veronica.

Opções Reais, Operações Urbanas e o Mercado Imobiliário na Cidade de São Paulo / Veronica Favato Brugugnoli -2012. 142f.

Orientador: Ricardo Ratner Rochman.

Tese (doutorado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo.

1. Opções reais (Finanças). 2. Mercado imobiliário - São Paulo (SP). 3. Investimentos imobiliários - São Paulo (SP). 4. Bens imóveis - Preços - São Paulo (SP). 5. Obras públicas – Investimentos. I. Rochman, Ricardo Ratner. II. Tese (doutorado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo. III. Título.

CDU 332.7

VERONICA FAVATO BRUGUGNOLI

**OPÇÕES REAIS, OPERAÇÕES URBANAS E O MERCADO IMOBILIÁRIO NA  
CIDADE DE SÃO PAULO**

Tese apresentada à Escola de Administração de  
Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio  
Vargas como requisito para obtenção do título de  
doutor em Administração de Empresas

Campo de Conhecimento:  
Mercados Financeiros e Finanças Corporativas

**Data de aprovação:**  
09 de fevereiro de 2012

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman (Orientador)

---

Profª. Dra. Andrea Maria Accioli Fonseca  
Minardi

---

Prof. Dr. Luiz Eduardo Teixeira Brandão

---

Prof. Dr. William Eid Júnior

---

Prof. Dr. Rogério Mori

*Para Paulo Eduardo*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu marido, Paulo Eduardo, cujas contribuições foram essenciais à elaboração deste trabalho. Sem a sua curiosidade, paciência e seus desenvolvimentos matemáticos, a realização desta pesquisa não se concretizaria.

À minha família e aos meus amigos, que souberam compreender solidariamente o necessário isolamento para que esta meta fosse alcançada.

Aos colegas de curso (mestrandos e doutorandos), com os quais tive o prazer de conviver (através das muitas horas de estudo e almoços), que colaboraram para complementar minha formação acadêmica.

A todos os professores da FGV-EAESP que contribuíram para a minha formação, sem a qual uma empreita como esta não seria factível. Em especial, ao Prof. Abraham Laredo Sicsú, por complementar sobremaneira minha formação quantitativa.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro essencial concedido durante o curso.

A todos os colaboradores do Centro de Estudos em Finanças da FGV, no suporte a várias atividades acadêmicas ao longo do curso.

A todos os funcionários da FGV-EAESP, especialmente aos da Seção de Pós-Graduação e do Serviço de Biblioteca e Documentação, cujo apoio é importante, não somente para a consecução de trabalhos desta ordem, mas também para todas as atividades e estudos que nessa escola diariamente são realizados.

Ao Prof. William Eid Júnior, que com seu bom humor e sabedoria enriqueceu este trabalho, durante a fase de qualificação.

Ao meu orientador, Prof. Ricardo Rochman, cujas horas preciosas de conversas e cafés contribuíram imensamente para a direção deste trabalho.

À Profa. Andrea Minardi, exemplo de determinação, pelas importantes sugestões e recomendações oferecidas na qualificação.

Ao Prof. Luiz Brandão, pela gentil e participativa assistência ao evento realizado no Rio de Janeiro, o Congresso International de Opções Reais, onde pude aprender com grandes nomes dessa área.

À Embraesp, principalmente à sua coordenadora de pesquisas, Sra. Samantha Furlan, pelo gentil fornecimento de dados.

Ao Sindepark São Paulo, por conta de seu presidente, Sr. Marcelo Alvim Gait, cujas informações sobre estacionamentos foram essenciais.

Ao colega da FGV, Felipe Francisco de Souza, arquiteto, pelo seu vasto conhecimento sobre operações urbanas e *land readjustment*.

Ao querido Prof. Paulo Sandroni, cujas informações sobre os CEPACs sinalizaram caminhos a serem seguidos na fase inicial desta jornada.

Ao funcionário da Secretaria Municipal de Finanças, Sr. André Luiz Galvão. Seus conhecimentos sobre ITBI e divisões de setores fiscais foram importantes ferramentas para o mapeamento das operações urbanas. Pelas mesmas razões e pela diligente assistência, uma menção de gratidão ao Sr. Bruno Carano, também da Secretaria Municipal de Finanças.

Ao gerente de operações urbanas da EMURB, Sr. Vladimir Ávila, que contribuiu com uma excelente entrevista.

Ao diretor de tecnologia do ZAP, Sr. Caio Bianchi, que forneceu estatísticas sobre preços de imóveis cruciais para a elaboração dos cálculos. Também agradeço à Fipe, em especial ao Sr. Eduardo Sylberstajn, colega de FGV, pelas informações sobre precificação de imóveis.

Ao Núcleo de Real Estate da Poli-USP, em especial à Dra. Eliane Monetti, por seus estudos acadêmicos, que foram de fundamental importância para a compreensão do mercado imobiliário.

Aos oficiais, Sr. Plínio Antônio Chagas (11º Cartório de Notas) e Sr. Rosvaldo Cassaro (15º Cartório de Notas), que deram valiosas orientações sobre matrícula de imóveis, Outorga Onerosa e divisão do solo.

Ao Jeová Deus, que me deu força e capacidade para concluir este trabalho.

## Opções Reais, Operações Urbanas e o Mercado Imobiliário na Cidade de São Paulo

### Resumo

**Introdução** – Destaca o problema da escolha do tempo e da densidade ótimos para construir um imóvel, dadas as restrições das leis de zoneamento. **Objetivo** – Verificar se há um prêmio pela opção de se esperar para construir um imóvel, analisar a influência dos CEPACs no custo de construção. **Métodos** – O modelo amplia as inferências de Quigg (1993) e testa o modelo de Williams (1991). Os dados utilizados são da Embraesp, com 3.207 lançamentos imobiliários; da Prefeitura de São Paulo, com 259.021 imóveis; do ZAP, com 22.073 imóveis; no período de 2005 a 2011. **Resultados** – O valor do terreno vago baseado no modelo de opções reais excedeu o valor observado em todos os cenários, variando entre 16,6% e 61%. O maior prêmio obtido foi para imóveis comerciais (37,9%), seguido pelo prêmio para apartamentos (34,5%) e para casas (23,9%). **Conclusões** – Há um prêmio para se esperar para construir um imóvel. Ao se utilizar os CEPACs como instrumento para aumentar a densidade de construção, amplia-se o custo de construção do imóvel. Entretanto, a ampliação da densidade é limitada pelo aumento do custo adicional de construção.

**Palavras-chave:** Operações Urbanas, CEPACs, Opções Reais.

## ABSTRACT

**Introduction** - highlights the problem of choosing the optimal time and the density to build a property, given the constraints of zoning regulations. **Objective** - To verify if there is a premium for the option to wait to build a property, analyzing the influence of CEPACS in the construction cost. **Methods** - The model extends the implications of Quigg (1993) and tests the model of Williams (1991). The data used are from Embraesp with 3207 launchings of real estate, from the Municipality of São Paulo, with 259,021 properties; from ZAP, with 22,073 properties, in the period 2005 to 2011. **Results** - The value of vacant land based on the model of real options exceeded the observed value in all scenarios, ranging from 16.6% to 61%. The biggest prize was obtained for commercial real estate (37.9%), followed by apartments (34.5%) and houses (23.9%). **Conclusions** - There is a prize to be expected to build a property. The CEPACs are used as a tool to increase density, also rising the cost of construction of the building. However, the increase of the density is limited by the additional cost of construction.

**Key words:** Urban Operations, CEPACs, Real Options.

## LISTA DE EQUAÇÕES, ESPECIFICAÇÕES E DEFINIÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Equação 1: Maximização do lucro na construção imediata.....                           | 45 |
| Equação 2: Solução do problema de maximização.....                                    | 45 |
| Equação 3: Valor do terreno vago em $t = 0$ .....                                     | 46 |
| Equação 4: Preço em $t=0$ .....   | 46 |
| Equação 5: Preços de estado equivalentes a taxa de desconto livre de risco.....       | 46 |
| Equação 6: Preço de estado superior.....  | 46 |
| Equação 7: Preço de estado inferior.....  | 46 |
| Equação 8: Processo geométrico de Wiener.....   | 49 |
| Equação 9: Taxas de crescimento ajustadas ao risco.....                               | 50 |
| Equação 10: Equação fundamental do preço para impedir arbitragem.....                 | 50 |
| Equação 11: Equação diferencial do preço da propriedade construída.....               | 50 |
| Equação 12: Condição de contorno $P(0)=0$ .....                                       | 50 |
| Equação 13: Condição de contorno $P(x_2)/x_2$ é limitado.....                         | 50 |
| Equação 14: Equação fundamental do valor do terreno vago para impedir arbitragem..... | 51 |
| Equação 15: Equação diferencial do valor do terreno vago.....                         | 51 |
| Equação 16: Condição de contorno $V(x_1,0) = 0$ .....                                 | 51 |
| Equação 17: Valor do terreno no momento da construção.....                            | 52 |
| Equação 18: Derivadas parciais de $V$ .....   | 52 |
| Equação 19: Densidade ótima de construção.....  | 52 |
| Equação 20: Equação do preço da propriedade construída.....                           | 52 |
| Equação 21: Definições de $\eta$ e $\psi$ .....                                       | 53 |
| Equação 22: Definição de $\omega$ .....   | 53 |
| Equação 23: Momento ótimo de construção $y^*$ .....                                   | 53 |
| Equação 24: Densidade ótima de construção $q^*$ .....                                 | 53 |

|  |    |
|--|----|
| Equação 25: Valor do terreno vago por unidade de custo de construção - $W(y)$ .....            | 53 |
| Equação 26: Densidade de construção que maximiza o valor do terreno vago .....                 | 56 |
| Equação 27: Equação de custo do modelo - $X$ .....   | 56 |
| Equação 28: Movimento Geométrico Browniano de $X$ .....  | 57 |
| Equação 29: Equação do preço do modelo - $P$ .....   | 57 |
| Equação 30: Movimento Geométrico Browniano de $P$ .....  | 58 |
| Equação 31: Prêmio ao risco .....  | 59 |
| Equação 32: Taxa de crescimento ajustada ao risco.....   | 59 |
| Equação 33: Taxa de crescimento ajusta ao risco para $P$ e $X$ .....                           | 60 |
| Equação 34: Equação fundamental do valor do terreno para evitar arbitragem .....               | 60 |
| Equação 35: Equação diferencial do valor do terreno vago .....                                 | 60 |
| Equação 36: Equação diferencial de Cauchy-Euler .....  | 61 |
| Equação 37: Soluções para a EDO de Cauchy-Euler.....   | 61 |
| Equação 38: Valores de $C3$ e $C4$ .....   | 61 |
| Equação 39: Valores de $j1$ e $j2$ .....   | 62 |
| Equação 40: Condições de contorno.....   | 62 |
| Equação 41: Sistema de equações em $C1$ e $z^*$ .....  | 62 |
| Equação 42: Valor de $C1$ .....  | 63 |
| Equação 43: Valor de $z^*$ (hurdle rate).....  | 63 |
| Equação 44: Valor do terreno vago por unidade de custo de construção - $W(z)$ .....            | 63 |
| Equação 45: Valor do terreno (exercício e vago).....   | 65 |
| Equação 46: Valor intrínseco do terreno .....  | 65 |
| Equação 47: Equação para a determinação da densidade que maximiza o valor de exercício.....    | 65 |
| Equação 48: Densidade de construção que maximiza o valor do terreno no exercício – $q_0$ ..... | 65 |
| Equação 49: Densidade no exercício - $q_e$ .....   | 66 |
| Equação 50: Valor do terreno (exercício e opção) em função da densidade de construção .....    | 66 |

|   |     |
|---|-----|
| Equação 51: Densidade ótima de construção para $q_e \geq q_0$ .....               | 67  |
| Equação 52: Densidade ótima de construção para $q_e < q_0$ .....                  | 68  |
| Equação 53: Equação do custo da construção com a inclusão do CEPACs.....          | 68  |
| Equação 54: Metro quadrado de área adicional.....                                 | 68  |
| Equação 55: Equações para maximização da densidade de construção com CEPACs ..... | 69  |
| Equação 56: Valor de $q_0$ para $q_0 < \delta_{bas}$ .....                        | 69  |
| Equação 57: Valor de $q_0$ para $\delta_{bas} < q_0 \leq \delta_{max}$ .....      | 69  |
| Equação 58: Valor de $q_0$ para $q_0 \geq \delta_{max}$ .....                     | 69  |
| Equação 59: Valor de $C_1$ .....  | 111 |
| Equação 60: Valor de $z^*$ (hurdle rate).....                                     | 111 |
| Equação 61: Valor de $q_0$ para $q_0 < \delta_{bas}$ .....                        | 116 |
| Equação 62: Valor de $q_0$ para $\delta_{bas} < q_0 \leq \delta_{max}$ .....      | 116 |

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1: Reparcelamento ( <i>replotting</i> ) de um lote em um <i>Land Readjustment</i> . .....                                   | 23  |
| Figura 2: Mapa da Operação Urbana Faria Lima. ....   | 36  |
| Figura 3: Mapa da Operação Urbana Água Espraiada. ....   | 39  |
| Figura 4: Mapa dos SQL (Setor, Quadra, Lote) Pertencentes às Operações Urbanas. ....   | 71  |
| Figura 5: Plotagem de 351 Imóveis Lançados nas Operação Águas Espraiadas (em vermelho),.....                                       | 73  |
| Figura 6: Exemplo de Como o Resultado de uma Vaga É Composto.....  | 102 |
| Figura 7: Fluxograma dos Dados e Cálculo dos Parâmetros para Obtenção dos Resultados. ....   | 106 |
| Gráfico 1: Valor da Opção x Valor de Exercício quando $q_e \leq q_o$ .....   | 66  |
| Gráfico 2: Valor da Opção x Valor de Exercício quando $q_e > q_o$ .....  | 67  |
| Gráfico 3: Evolução dos Preços por Metro Quadrado dos Apartamentos para a Região da Operação Urbana Água Espraiada.....            | 74  |
| Gráfico 4: Evolução dos Preços por Metro Quadrado dos Apartamentos para a Região da Operação Urbana Faria Lima. ....               | 75  |
| Gráfico 5: Evolução do Preço por Metro Quadrado de Casas na Região da Operação Urbana Água Espraiada. ....                         | 76  |
| Gráfico 6: Evolução do Preço por Metro Quadrado de Casas na Região da Operação Urbana Faria Lima. ....                             | 76  |
| Gráfico 7: Evolução do Preço dos Imóveis Comerciais na Região da Operação Urbana Água Espraiada. ....                              | 77  |
| Gráfico 8: Evolução do Preço dos Imóveis Comerciais na Região da Operação Urbana Faria Lima. .                                     | 78  |
| Gráfico 9: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Apartamentos por Número de Dormitórios, Operação Urbana Água Espraiada. .... | 78  |
| Gráfico 10: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Apartamentos por Número de Dormitórios, Operação Urbana Faria Lima. ....    | 79  |
| Gráfico 11: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Todos os Apartamentos. ....   | 80  |

|   |     |
|---|-----|
| Gráfico 12: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Imóveis Comerciais. ....   | 81  |
| Gráfico 13: Taxas de Crescimento Composto do Preço para Casas. ....   | 82  |
| Gráfico 14: Volatilidades das Taxas de Crescimento do Preço para Imóveis Residenciais de 1 (à Esquerda) e 2 (à Direita) Dormitórios. ....         | 82  |
| Gráfico 15: Volatilidades das Taxas de Crescimento do Preço para Imóveis Residenciais de Três (à Esquerda) e Quatro (à Direita) Dormitórios. .... | 83  |
| Gráfico 16: Volatilidade da Taxa de Crescimento do Preço para Imóveis Comerciais. ....  | 84  |
| Gráfico 17: Volatilidade da Taxa de Crescimento do Preço para Casas. ....   | 84  |
| Gráfico 18: Evolução do CUB Médio (Verde), ICC (Vermelho) e Selic (Azul). ....  | 87  |
| Gráfico 19: Evolução do Prêmio da Opção por Esperar versus Operação Urbana. ....  | 109 |
| Gráfico 20: Evolução do Prêmio da Opção por Esperar por Tipo de Imóvel. ....  | 110 |
| Gráfico 21: Evolução do Valor Crítico $z^*$ Comparado com a Evolução da SELIC. ....   | 113 |
| Gráfico 22: Evolução do Valor Crítico $z^*$ Comparado com a Evolução do $\beta$ . ....  | 113 |
| Gráfico 23: Densidade Ótima de Construção $q^*$ (em m <sup>2</sup> de Área Construída) em Relação ao Preço do CEPAC. ....                         | 114 |
| Gráfico 24: Comparação entre a Densidade Observada ( $q/AT$ ) e a Densidade Ótima ( $q^*/AT$ ) Prevista pelo Modelo de Opções Reais. ....         | 115 |
| Gráfico 25: Comportamento da Densidade Ótima $q^*/AT$ (Área Ótima Construída/Área do Terreno) em Relação à Área do Terreno. ....                  | 117 |

## LISTA DE TABELAS

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Tabela 1: Operações Interligadas por Gestão. ....</b>  | <b>26</b> |
| Tabela 2: Cronologia das Operações Urbanas e sua Legislação. ....                                       | 30        |
| Tabela 3: Efeitos e Restrições no Modelo de Williams. ....  | 55        |
| Tabela 4: Comparações entre os Trabalhos de Williams, Medeiros e Quigg.....                             | 59        |
| Tabela 5: Comparações entre os Resultados de Quigg e os deste Trabalho.....                             | 64        |
| Tabela 6: Número de Amostras do ZAP por Localidades e Tipos de Imóveis. ....                            | 72        |
| Tabela 7: O CUB Médio, Sua Correlação com Mercado, Taxa de Crescimento Composto e<br>Volatilidade. .... | 88        |
| Tabela 8: Lambda de Mercado Utilizando o Valor das Ações da Construção Civil.....                       | 90        |
| Tabela 9: Parâmetros de Correlação, Taxa de Crescimento e Volatilidades.....                            | 90        |
| Tabela 10: O Parâmetro $v_p$ , Taxa de Crescimento do Preço Ajustada ao Risco por Ano e Bairro. ....    | 92        |
| Tabela 11: Coeficientes de Aproveitamento para Diferentes Zonas de Uso.....                             | 98        |

## SUMÁRIO

|   |     |
|---|-----|
| 1. INTRODUÇÃO .....   | 18  |
| 2. AS OPERAÇÕES URBANAS E OS CEPACS.....                            | 23  |
| 2.1 O <i>Land Readjustment</i> : do Japão para o Mundo .....        | 23  |
| 2.2 Operações Interligadas .....                                    | 25  |
| 2.3 Operação Urbana Consorciada.....                                | 26  |
| 2.4 Os Certificados de Potencial de Construção – CEPACs.....        | 32  |
| 2.4.1 Operação Urbana Faria Lima .....                              | 35  |
| 2.4.2 Operação Urbana Água Espreada .....                           | 38  |
| 3. OPÇÕES REAIS EM EMPREENDIMENTOS IMOBILIÁRIOS .....               | 40  |
| 3.1 Revisão Bibliográfica.....                                      | 41  |
| 3.2 O modelo de Titman.....   | 45  |
| 3.2 O Modelo de Williams (1991) .....                               | 48  |
| 3.4 O Modelo de Williams Modificado por Quigg .....                 | 56  |
| 3.5. O Modelo Proposto .....  | 61  |
| 4. METODOLOGIA .....  | 70  |
| 4.1. Dados e Indicadores .....                                      | 70  |
| 4.2 Parâmetros de Preço de Venda dos Imóveis .....                  | 74  |
| 4.3 Regressões para os Preços dos Imóveis .....                     | 85  |
| 4.4 Parâmetros do Custo de Construção.....                          | 86  |
| 4.4.1 Prêmio de Risco .....   | 88  |
| 4.4.2 Covariância.....  | 93  |
| 4.4.3 Retorno do Ativo Livre de Risco .....                         | 93  |
| 4.4.4 Restrições Legais.....  | 94  |
| 4.5 Incluindo os CEPACs no Modelo .....                             | 100 |
| 4.6 Utilização Subótima do Terreno Vago.....                        | 102 |
| 4.7 Elasticidade do Custo de Construção e Tempo de Construção ..... | 104 |
| 5. RESULTADOS DO MODELO .....                                       | 107 |
| 5.1 O Prêmio pela Opção .....                                       | 107 |
| 5.2 O Valor Crítico de $Z^*$ .....                                  | 110 |
| 5.3 A Densidade Ótima $q^*$ .....                                   | 114 |
| 6. CONCLUSÕES.....  | 119 |

|  |     |
|--|-----|
| REFERÊNCIAS .....  | 121 |
| ANEXOS.....  | 126 |
| Processo de determinação da taxa média de retorno composto ..... | 126 |
| Desenvolvimentos Matemáticos .....                               | 130 |
| Regressões .....   | 139 |

## 1. INTRODUÇÃO

Para que os investimentos no mercado imobiliário sejam realizados de forma ótima, é necessário que várias decisões sejam tomadas. Uma das mais importantes é o tempo ótimo para a construção da propriedade, seja ela residencial ou comercial. Essa decisão é cercada de incertezas relativas ao custo do terreno, que varia ao longo do tempo, e às condições de mercado vigentes após o término da construção.

De acordo com Titman (1985) um terreno representa um ativo extremamente valioso e pode ser usado como instrumento de investimento e especulação. De um lado, há um tempo ótimo para investir, uma opção de esperar para construir e um tempo ótimo de construção que precisam ser ajustados com as condições de demanda. Ao mesmo tempo, existem leis de zoneamento e planos diretores que limitam o uso de um terreno. Titman (1985) foi o primeiro autor a considerar o terreno vago como uma opção para se esperar antes de construir.

Para Williams (1991), sujeito às restrições legais, o proprietário de um terreno vago pode determinar a data e a densidade para construir seu imóvel. O valor dessas opções depende da evolução estocástica no tempo do fluxo de caixa e dos custos de construção da propriedade. Nesse sentido, a opção de se construir um imóvel difere das opções financeiras de compra e venda transacionadas em mercados organizados. Construir um imóvel é como exercer uma opção: o proprietário escolhe a data da construção.

Essa opção é mais valiosa na medida em que aumenta a incerteza ao longo do tempo tanto no fluxo de caixa quanto em custos de construção. Se os investidores podem substituir os ativos continuamente sem custos de transação em um mercado de capitais perfeitamente competitivo, então o proprietário constrói sua propriedade somente quando ela maximiza o valor de mercado do imóvel. Por exemplo, maximizar o valor de mercado é ótimo se o mercado de capitais é perfeitamente competitivo, mesmo que o imobiliário não o seja. Uma vez que a opção de construir nunca expira, o proprietário exerce sua opção de maneira ótima somente se o valor do fluxo de caixa exceder o custo de construção. Considera-se que a construção seja irreversível, o que se assemelha ao exercício das opções financeiras.

Conforme ressalta Grenadier (1995), os mercados imobiliários são caracterizados por períodos prolongados com um número de propriedades vagas acima do normal, seguidos por períodos, também longos, de vagas abaixo da média. É evidente que esses ciclos são mais pronunciados em alguns mercados do que em outros, mas o fato é que nenhum projeto pode

ser bem-sucedido se o término da sua construção coincidir com um momento de baixa demanda. Logo, na decisão de construir também está embutida uma importante opção de adiar a construção, à espera de novas informações, tanto sobre as condições de mercado quanto sobre os custos de construção. O tamanho ótimo do investimento, ou seja, o número de unidades a serem construídas, representado por sua densidade, também representa outro importante passo rumo a um investimento ótimo. Tais decisões devem ser tomadas simultaneamente, uma vez que elas estão intrinsecamente relacionadas.

A maioria das decisões de investimento possui em comum três características essenciais. A primeira é que o investimento é parcialmente ou completamente irreversível. Isto é, caso haja desistência, será muito difícil que se recupere o custo inicial. O segundo aspecto é a incerteza sobre os retornos futuros. Por fim, a importância do tempo do investimento.

Para que um projeto qualquer seja bem-sucedido, é essencial que os seus gerentes reconheçam essas três características básicas, a fim de aproveitar as condições favoráveis e limitar as perdas. Várias são as decisões que podem ser tomadas ao longo da vida útil de um projeto. Essas decisões são conhecidas na literatura como opções reais, pois cada uma delas pode ser comparada a uma opção ou a uma carteira de ações.

No caso do mercado imobiliário, a opção é um terreno vazio e o ativo subjacente, uma propriedade construída. O valor corrente desse ativo é descrito pelo valor presente do seu fluxo de caixa futuro oriundo da venda das unidades, o preço de exercício é o custo de construção e a maturidade é infinita. Nesse contexto, a escolha do momento ótimo para a construção é análoga a exercer a opção no seu melhor momento. A teoria neoclássica tradicional analisa o investimento inserido em um contexto de certeza, onde o valor presente líquido é a base das decisões, não capturando essas opções, subestimando assim o verdadeiro valor do projeto e podendo levar a conclusões erradas. Dessa forma, a teoria tradicional não é a mais adequada para analisar situações que envolvem incerteza, como é o caso dos investimentos no mercado imobiliário. Em resposta, surgiu uma literatura baseada na utilização de opções reais conforme análises do mercado imobiliário.

Segundo Fávero (2007), o ferramental da Teoria de Opções Reais permite uma análise de investimentos, procurando associar, ao valor total de uma operação, suas diversas opções embutidas na tomada de decisão, as quais agregam grande valor a um investimento por possibilitar a redução de riscos frente às condições de incerteza e flexibilidades do mercado.

O estudo considerado neste trabalho, voltado para a avaliação imobiliária no Brasil, considerou a capacidade de se construir um imóvel além do permitido pela lei de zoneamento. Nesse sentido, entende-se que nosso estudo é original, pois pretende examinar os modelos baseados em opções reais no mercado imobiliário, relacionando preços de imóveis aos CEPACs (Certificado de Potencial Adicional de Construção). Através do leilão desse ativo, seu portador pode construir acima do permitido pela Lei de Zoneamento ou modificar o uso de seu imóvel. Com os recursos arrecadados pela venda dos CEPACs, a Prefeitura de São Paulo pode realizar intervenções nas áreas das Operações Urbanas.

O modelo aqui considerado agrega a opção de esperar para investir, ou seja, o momento ótimo de construção, bem como a possibilidade de se construir acima do permitido pela lei de zoneamento. Por meio da análise dos modelos de Titman (1985), Williams (1991) e Quigg (1993) e os ajustes matemáticos realizadas nesta pesquisa, constrói-se um modelo de opções que inclui os CEPACs. As informações empíricas são fornecidas segundo o valor do terreno baseado em opções reais, relacionando-o com seu valor intrínseco e seu preço de mercado. Esta pesquisa obteve o prêmio pela opção em áreas de Operações Urbanas, utilizando dados de lançamentos de imóveis nas regiões das maiores operações urbanas de São Paulo (Faria Lima e Águas Espraiadas).

Como resultado, há suporte empírico para o modelo que compreende a opção de esperar pelo momento ótimo para construir, revelando um prêmio por essa opção. O prêmio pela opção é a diferença entre o valor intrínseco e o valor dado por esse modelo. Além disso, também é analisada a influência dos CEPACs nos valores críticos da razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção e na densidade ótima de construção.

Este trabalho tem como objetivo geral a compreensão da influência dos CEPACs na densidade ótima e na razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção dos imóveis; de forma mais específica, pretende-se:

- Verificar se há um prêmio pela opção de se esperar para construir um imóvel
- Calcular a densidade de construção e a razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção antes e depois dos CEPACs
- Analisar a influência dos CEPACs no custo de construção
- Verificar se a elasticidade do custo de construção é maior que a elasticidade do preço do imóvel.

Para atingir esse objetivo, são formuladas algumas questões e suas hipóteses:

Questão 1: Há alguma diferença relativa entre o valor do terreno vago observado e seu valor calculado pelo modelo de opções reais?

Hipótese 1: Há um prêmio pela opção de se esperar para construir.

Questão 2: Há alguma diferença entre a elasticidade do custo de construção e a elasticidade do preço do imóvel?

Hipótese 2: A elasticidade do custo de construção é maior que a elasticidade do preço do imóvel.

Questão 3: Qual o impacto na razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção, ao decidir postergar o investimento?

Hipótese 3: Quanto maior a diferença entre o coeficiente básico de aproveitamento do terreno e seu coeficiente máximo (e o CEPAC causa um intervalo maior), maior o valor da opção de se construir em densidades diferentes, e, portanto, maior o valor da razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção.

Questão 4: Qual a influência dos CEPACs na densidade ótima de construção?

Hipótese 4: Ao se utilizar os CEPACs como instrumento para aumentar o potencial de construção, amplia-se também o custo de construção do imóvel. A ampliação da densidade é limitada pelo aumento do custo adicional de construção.

Este trabalho foi organizado em seis capítulos. Neste primeiro, o tema é brevemente introduzido. Na sequência, o capítulo 2 apresenta uma contextualização para o tema das operações urbanas e dos CEPACS e o capítulo 3, uma revisão da literatura sobre os mais importantes aspectos ligados ao objeto de estudo, incluindo também iniciativas de pesquisa não diretamente ligadas à essência desta tese, mas que contribuíram para a compreensão do campo de estudos, apresentando os principais modelos ligados às opções reais e ao mercado imobiliário, bem como o modelo proposto neste trabalho. No capítulo 4 são detalhados as variáveis de estudo e os métodos empregados sobre os dados levantados, sendo estimados os parâmetros do modelo. No capítulo 5 são apresentados os resultados e as evidências obtidos com as conclusões que deles podem ser inferidas. O capítulo 6 resume as principais contribuições desta tese, as limitações e sugestões para pesquisas futuras. Os principais

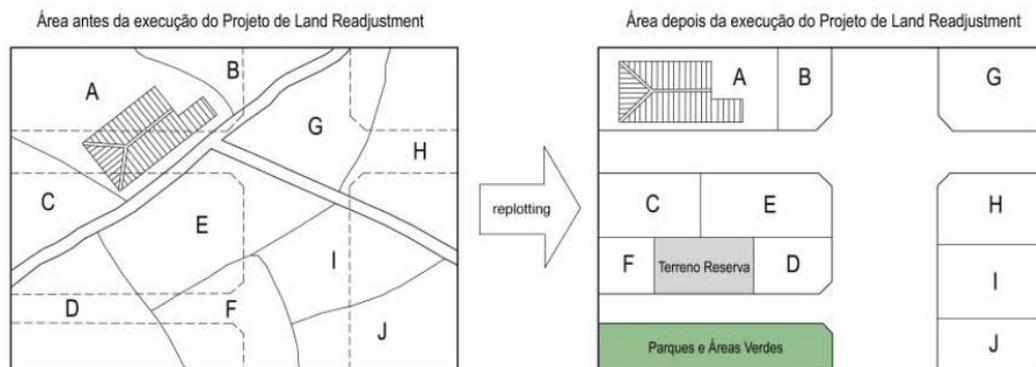
desenvolvimentos matemáticos, os resultados das regressões e os esclarecimentos adicionais sobre o modelo proposto encontram-se nos anexos.

## 2. AS OPERAÇÕES URBANAS E OS CEPACS

### 2.1 O *Land Readjustment*: do Japão para o Mundo

Segundo Schnidman (1988) o *Land Readjustment*, *Land Consolidation* ou *Land Pooling* é uma técnica que pode melhorar as instalações públicas e melhorar o uso da terra através de sua modificação em parcelas. Os proprietários contribuem com parte de seus terrenos para a organização da infraestrutura local. Ao final do projeto, as reservas de terra são vendidas para pagar os custos de planejamento, administração e construção da infraestrutura pública (Sorensen, 1999). Assim, as reservas de terra provenientes da contribuição de cada proprietário são comercializadas pela prefeitura para financiamento da operação, e a requalificação urbana contribui para uma valorização da área, sendo benéfica aos proprietários dos terrenos.

De acordo com Sorensen (1999), os custos e os benefícios resultantes das intervenções realizadas em áreas específicas são compartilhados entre o poder público e o privado. Através do redirecionamento, reposicionamento e até mesmo concessão de parte do terreno de interesse público, são compostas áreas para intervenções públicas. A figura 1 mostra o reparcelamento de um lote em um *Land Readjustment*.



**Figura 1: Reparcelamento (replotting) de um lote em um *Land Readjustment*.**

Fonte: Montandon e Souza (2007).

Os residentes recebem diversos benefícios após a execução do projeto, entre eles: melhorias do meio urbanizado; segurança e prevenção a desastres naturais (terremotos e suas consequências – deslizamentos de terra, incêndios, inundações e enchentes); sobrevalorização das propriedades por meio da eficiente utilização das unidades fundiárias, o que agrega novo uso e ocupação do solo.

Essa operação pode prover lotes para: habitação em zonas periféricas, desenvolvendo unidades fundiárias que possibilitam a construção de habitações; instalações com a finalidade

de prevenção da ocupação desordenada e constituição de novas zonas residenciais. Também pode desenvolver a infraestrutura urbana em áreas já muito urbanizadas, para a renovação de suas funções urbanas, readequando ou melhorando as infraestruturas já instaladas.

A equipe técnica mantém os proprietários dos locais de intervenção e residentes do entorno informados de todo o processo, pois a participação direta da população na definição dos planos de intervenção torna-se fundamental para o sucesso do projeto urbano.

Segundo Montandon e Souza (2007), durante todo o processo de execução, as unidades fundiárias são redimensionadas e reposicionadas e o direito sobre a propriedade do antigo lote é convertido ao novo proprietário. Os projetos são executados em comum acordo entre todos os proprietários e inquilinos envolvidos. Os proprietários contribuem com parte de sua propriedade durante o processo de reparcelamento dos terrenos. Dessa forma, o novo lote resultante torna-se menor, porém readaptado às novas funções propostas dentro do projeto. A execução de obras públicas de infraestrutura urbana resulta em uma contribuição, e seu valor equivale à relação entre a área total anterior e a área total posterior ao processo de reparcelamento.

Após a execução do projeto, o valor dos terrenos “reparcelados” é maior do que antes, por causa da melhoria efetiva de sua utilização e da proximidade em relação às novas instalações urbanas – como áreas verdes, vias de acesso mais amplas e novo transporte público. Essa sobrevalorização é denominada “acréscimo do valor do uso do solo”.

De acordo com Montandon e Souza (2007), aplicado por todo o território, esse método ficou conhecido como a Mãe do Planejamento Urbano no Japão, sendo promulgada uma Lei de Planejamento Urbano em 1919.

Ao longo de quase um século de sua aplicação, muitas modalidades de projeto foram aperfeiçoadas, transformando no Japão mais de 11 mil áreas, ou 390.000 ha. Além disso, seus conceitos foram traduzidos e adaptados outros países, tais como: Alemanha, Índia, Austrália, Turquia, Coreias do Sul e do Norte, Taiwan, Espanha, Turquia, Indonésia, Nepal, Canadá, Colômbia, Tailândia, Estados Unidos, Suécia, Malásia e Filipinas.

No Japão, em meados de 1870, esse método começou a ser esboçado para a consolidação e melhoramento das unidades agrícolas, sendo aplicado em regiões afetadas por grandes desastres naturais, a fim de reconstruir e adaptar zonas urbanas para terremotos.

Ele ganhou popularidade na Segunda Guerra Mundial, sendo utilizado intensivamente em áreas destruídas. A partir da década de 1950, por causa do rápido processo de urbanização, problemas urbanos e ambientais de diversas naturezas começaram a aparecer nas principais cidades japonesas. Em 1954 foi promulgada a Lei do *Land Readjustment*. Em 1968, a Lei de Planejamento Urbano passou por drástica revisão, passando a designar o método como instrumento obrigatório em todos os planos de desenvolvimento urbano.

Atualmente, o *Land Readjustment* é utilizado como método para desenvolvimento regional por meio de implementação e melhoria da infraestrutura urbana sem qualquer desapropriação das unidades fundiárias. Com base nesse princípio, ele, ou métodos similares, demonstra possuir um caráter de “uso geral”, capaz de ser aplicado em diversos países de realidades distintas.

## **2.2 Operações Interligadas**

As transformações urbanas que ocorreram na cidade de São Paulo, especialmente nos últimos anos, foram aceleradas por suas operações urbanas. O trânsito lento, a disputa por garagens, a multiplicação de paisagens homogêneas, o crescimento vertical acelerado das edificações, o aumento do número de escritórios, a proliferação de pontes, rodovias e viadutos, o deslocamento de populações sem poder aquisitivo para áreas periféricas – todas essas características se referem a novas formas de ocupação que identificam aspectos funcionais e estruturais da sociedade moderna.

Enquanto, em 1980, a região metropolitana de São Paulo apresentava uma população de 12,6 milhões de habitantes, em 2010 esse número passou para 19 milhões (IBGE, 2010) e a existência de uma descontinuidade espacial ao longo da metrópole, que evidencia um novo padrão urbano chamado de modernização precária, acentua os problemas relacionados à provisão de serviços de qualidade nas áreas de infraestrutura urbana e moradia.

De acordo com Wilderode (1997), antes das operações urbanas, as operações interligadas foram a primeira experiência de aplicação do conceito de solo criado em São Paulo. As interligadas constituíam um mecanismo estabelecido em lei, por meio do qual a iniciativa privada doava à Prefeitura certo número de Habitações de Interesse Social para a população moradora de favela, em troca de modificações de índices e características de uso e ocupação do solo em terrenos de sua propriedade. Durante o período de vigência das operações interligadas, foram firmados 313 Termos de Compromisso, o que gerou uma contrapartida no

valor de US\$ 58,3 milhões – quantia suficiente para a construção de 11.000 habitações de interesse social, gerando uma área adicional de 466.658 m<sup>2</sup>. Os números dessas operações estão na tabela 1.

**Tabela 1: Operações Interligadas por Gestão.**

| Operações Interligadas            | Número de Propostas | Valor em US\$ milhões | Área adicional milhares m <sup>2</sup> | US\$/m <sup>2</sup> |
|-----------------------------------|---------------------|-----------------------|--|---------------------|
| Gestão Jânio Quadros 1985 - 1989  | 5                   | 5,4                   | 117,5                                  | 46                  |
| Gestão Luiza Erundina 1989 - 1993 | 49                  | 26,5                  | 188,9                                  | 140                 |
| Gestão Paulo Maluf 1993 – 1997    | 61                  | 26,4                  | 160,2                                  | 165                 |
| <b>Total</b>                      | <b>115</b>          | <b>58,3</b>           | <b>466,6</b>                           | <b>125</b>          |

Fonte: Wilderode, 1997.

Houve muita controvérsia em relação ao desempenho das interligadas enquanto política pública. Os recursos para o financiamento de habitações de interesse social foram obtidos. Entretanto, várias questões foram levantadas quanto à sua utilização como flexibilização da lei de zoneamento, quanto à falta de critério e parâmetro para análise de contrapartida, quanto à distribuição das propostas no território e quanto aos resultados urbanísticos. Essas operações permitiam aos empreendedores imobiliários burlar a Lei de Zoneamento, desde que pagassem uma quantia a ser utilizada na construção de casas populares. Além disso, com o recurso dessas operações, nenhuma habitação de interesse social foi construída.

Em 1998, esse mecanismo foi suspenso e posteriormente proibido em 2000 devido à ação de inconstitucionalidade movida pelo Ministério Público, por estar em desacordo com a lei de zoneamento.

### 2.3 Operação Urbana Consorciada

O Estatuto da Cidade (Lei 10.257 de 10/0701) a define como:

“Art.32 §1 Considera-se Operação Urbana Consorciada o conjunto de intervenções e medidas coordenadas pelo Poder Público Municipal com a participação dos proprietários moradores usuários permanentes e investidores privados, com o objetivo de alcançar em uma área transformações urbanísticas estruturais, melhorias sociais e a valorização ambiental.”

Uma Operação Urbana Consorciada é um instrumento urbanístico que excepciona a Lei de Uso e Ocupação do Solo (Lei 7.805/72), sendo utilizada para requalificar uma área da cidade ou para implantar e/ou ampliar infraestruturas urbanas, por meio de intervenções, em áreas da cidade onde haja interesse imobiliário com demanda acima dos limites estabelecidos pela lei de zoneamento. Essa operação permite ao município outorgar, de forma onerosa, Direitos Urbanísticos Adicionais a uma área urbana delimitada. A Operação Urbana autoriza o Poder

Público Municipal a conceder, dentro de um perímetro definido em lei própria, índices e parâmetros urbanísticos adicionais àqueles previstos na legislação ordinária de uso e ocupação do solo, em troca de contrapartida a ser paga pelo interessado.

De acordo com a Prefeitura do Município de São Paulo (2007), cada operação é criada por meio de lei específica, que descreve o perímetro, os direitos e as responsabilidades das partes envolvidas, define os critérios de financiamento e estabelece um Programa de Investimentos que serão custeadas com as contrapartidas. Os recursos advindos das contrapartidas são considerados recursos extra-orçamentários, depositados em uma conta bancária vinculada a cada Operação Urbana, e devem, obrigatoriamente, ser aplicados nas Intervenções dentro dos limites estabelecidos na própria lei.

Cada Operação Urbana Consorciada envolve os seguintes aspectos principais: a necessidade de sua criação por meio de Lei Municipal específica, com definição da área atingida, a especificação do plano contendo o programa básico de ocupação, o programa de atendimento econômico e social da população diretamente afetada, sua finalidade, o estudo técnico do impacto de vizinhança, a contrapartida a ser exigida do proprietário que se beneficiar da operação, as regras para as alterações dos índices de loteamento, parcelamento, uso e ocupação do solo, regularizações de imóveis, com a emissão de CEPAC, e a forma de controle da operação compartilhado com representantes da sociedade civil.

As Operações Urbanas têm origem no conceito de "solo-criado", desenvolvido por urbanistas a partir de meados da década de 1970. O solo criado pressupõe a existência de um Coeficiente de Aproveitamento, de maneira a eliminar as diferenças econômicas entre regiões que o Zoneamento instituiu. A partir desse coeficiente – originalmente equivalente a uma vez a área do terreno – aquilo que fosse construído a mais seria considerado solo criado.

Segundo Santoro e Symbalista (2004), o conceito de operação urbana foi introduzido no Brasil nas décadas de 1970 e 1980, como absorção da experiência internacional francesa e norte-americana de controle de densidades, controle da valorização imobiliária e política de preservação de imóveis históricos. No município de São Paulo, as operações consorciadas foram incorporadas nos planos diretores de 1985, 1988, 1991 e 2002 e aplicadas a partir da década de 1990, marcando o período de experimentação do instrumento. A partir de 2001, com o estabelecimento do marco regulatório da política urbana através do Estatuto da Cidade, houve uma continuidade e uma adaptação do modelo adotado até então. Em São Paulo, desde 1991 foram aprovadas cinco Operações Urbanas:

- Operação Urbana Anhangabaú;
- Operação Urbana Faria Lima;
- Operação Urbana Água Branca;
- Operação Urbana Centro;
- Operação Urbana Consorciada Água Espraiada.

A Operação Urbana Anhangabaú foi aprovada na gestão de Luiza Erundina pela Lei 11.090/91, com prazo de três anos, e visava a captação de recursos para finalizar as obras no Vale do Anhangabaú iniciadas na gestão Jânio Quadros. Essa operação se extinguiu no prazo previsto na própria lei (Wilderode, 1997).

A Operação Água Branca foi instituída pela Lei nº 11.774/95, na gestão de Paulo Maluf, tendo um caráter diferenciado da Operação Faria Lima. O perímetro definido corresponde a uma área originalmente industrial, caracterizada por grandes plantas industriais e grandes glebas não urbanizadas em pleno centro expandido da cidade, que vinha perdendo dinâmica econômica e não possuía atividade imobiliária expressiva. Assim como as demais Operações Urbanas que antecederam à Operação Urbana Consorciada Água Espraiada, não contemplava um projeto urbanístico para o conjunto do perímetro, apenas algumas diretrizes viárias que efetivamente não estruturam aquela área (Wilderode, 1997).

A Operação Urbana Centro possui motivações distintas das demais Operações Urbanas. A Lei nº 12.349/97, que instituiu a Operação Urbana Centro, delimita uma área totalmente urbanizada e consolidada que, basicamente, corresponde ao centro histórico de São Paulo. Foi concebida com o intuito de recuperar, redinamizar e requalificar a área central da cidade. Partiu do conceito de que era essencial repovoar o centro para recuperá-lo. Assim, foram estimulados os usos residencial, hoteleiro e de estacionamento. Para tanto, a lei prevê muito mais a criação de estímulos do que execução de Intervenções financiadas com contrapartidas (Wilderode, 1997).

Um de seus instrumentos, denominado transferência de potencial construtivo, gerou uma Ação Direta de Inconstitucionalidade por parte do Ministério Público Estadual, pois permitia que os proprietários de imóveis tombados, aos quais não era permitido adicional de construção por ser patrimônio histórico, pudessem, de forma onerosa, transferir esse adicional

para outro lote em outra área da cidade. Esses recursos deveriam ser obrigatoriamente aplicados em obras de recuperação do imóvel tombado, com controle dos órgãos públicos.

Uma vez que a Operação Urbana Água Branca não abrangia um projeto urbanístico, a Operação Anhangabaú se extinguiu e a Operação Urbana Centro foi considerada inconstitucional, foram analisadas as regiões das Operações Urbanas Faria Lima e Água Espraiada.

Na década de 1990, fase inicial da aplicação de suas leis, as operações urbanas estavam localizadas em regiões de urbanização consolidada, objetivando a reconversão de áreas subutilizadas (Água Branca), a renovação de áreas centrais (Centro) e a consolidação de novas centralidades (Faria Lima). Todas essas operações tinham finalidades específicas e contavam com a arrecadação de recursos provenientes das contrapartidas para efetivarem obras públicas. Também apresentavam caráter de excepcionalidade e, principalmente, de flexibilização da legislação de uso e ocupação do solo vigente no período. (Vale lembrar que a lei de zoneamento datava da década de 1970, estando, portanto, desatualizada em relação às dinâmicas urbanas ocorridas no município ao longo de mais de duas décadas).

De acordo com a Prefeitura do Município de São Paulo (2007), o Plano Diretor de um Município pode fixar áreas nas quais os Direitos Urbanísticos Adicionais poderão ser exercidos, mediante contrapartida a ser prestada pelo beneficiário, o que se denomina Outorga Onerosa do direito de construir ou modificar o uso do solo.

O Município cria, por meio de lei, uma Operação Urbana Consorciada, que é o conjunto de intervenções coordenadas pelo Poder Público municipal, com a participação dos proprietários, moradores, usuários permanentes e investidores privados, com o objetivo de alcançar na área específica transformações urbanísticas estruturais, melhorias sociais e a valorização ambiental.

Após a aprovação do Estatuto da Cidade e do Plano Diretor Estratégico do Município, as Operações Urbanas Consorciadas continuaram com o conjunto de leis vigentes, tendo sido aprovada mais uma lei (Água Espraiada, Lei 13.260/01) e sendo previstas novas operações. Nessa fase, verifica-se maior amplitude e diversidade territorial de incidência das operações – áreas de urbanização consolidada, áreas de urbanização em consolidação e áreas de urbanização em reestruturação. Atualmente as operações ainda são planejadas com a finalidade de obtenção de recursos para o financiamento de infraestrutura, porém são

vinculadas a projetos urbanos abrangentes – e não mais destinadas à função “secundária” de flexibilização da lei de uso e ocupação do solo. Na tabela 2 observa-se a cronologia das Operações Urbanas e sua Legislação.

**Tabela 2: Cronologia das Operações Urbanas e sua Legislação.**

| <b>Ano</b> | <b>Acontecimentos</b>  |
|------------|--|
| 1972       | Lei de Uso e Ocupação do Solo (Lei 7.805/72)   |
| 1985       | Operações Urbanas do Plano Diretor e o Plano Diretor da gestão Mário Covas               |
| 1986       | Operações Interligadas da gestão Jânio Quadros (Lei 10.209)                              |
| 1988       | Institucionalização das Operações Urbanas no Plano Diretor (Lei 10.676)                  |
| 1988       | Nova Constituição Brasileira   |
| 1991       | Operação Urbana Anhangabaú da gestão Luiza Erundina                                      |
| 1995       | Operação Urbana Faria Lima (Lei 11.732) e a instituição dos CEPACs na gestão Paulo Maluf |
| 1995       | Operação Urbana Água Branca (Lei 11.774)   |
| 1997       | Operação Urbana Centro (Lei 12.349)  |
| 2001       | Estatuto da Cidade (Lei 10.257)  |
| 2001       | Operação Urbana Água Espraiada (Lei 13.260)  |
| 2002       | Plano Diretor da gestão Marta Suplicy  |

Fonte: Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da USP, Departamento de Projetos, 2010.

Segundo Oliveira (2001), o Estatuto da Cidade não vincula necessariamente os instrumentos urbanísticos a determinados problemas urbanos, nem define a maneira de combiná-los na aplicação. Muitas vezes, para serem corrigidas as distorções urbanas (entendidas aqui como o crescimento desordenado, a falta de infraestrutura, a ocupação irregular de áreas impróprias à urbanização etc.); vários instrumentos podem ser utilizados para uma mesma finalidade. Para Operação Urbana Consorciada, a finalidade está associada aos temas da recuperação da valorização imobiliária gerada por investimentos e ações públicas e à transformação de setores urbanos por meio de intervenções abrangentes de caráter reestruturador.

O Estatuto da Cidade permite a modificação de índices e características de parcelamento, uso e ocupação do solo e subsolo, bem como alterações das normas edilícias (considerado o impacto ambiental delas decorrente) e a regularização de construções, reformas ou ampliações executadas em desacordo com a legislação vigente. A concessão de potencial adicional de construção é a principal medida adotada, considerada um incentivo aos proprietários e investidores privados. Na medida em que existe a possibilidade de se construir mais, há um melhor aproveitamento econômico do terreno e o proprietário acaba sendo beneficiado. Aqui vale um esclarecimento à parte: o potencial construtivo adicional e a correspondente contrapartida, praticados nas áreas de operação urbana, assemelham-se muito ao instrumento da Outorga Onerosa do direito de construir, porém com finalidades distintas (Oliveira, 2001).

Segundo Sandroni (2008), a Outorga Onerosa surgiu da separação entre direito de propriedade e direito de construir, como decorrência do conceito de Solo Criado. O Solo Criado é toda a

área edificável além do coeficiente único de aproveitamento do lote, legalmente fixado, sendo sempre um acréscimo ao direito de construir além do coeficiente básico de aproveitamento estabelecido. O instituto da Outorga Onerosa do Direito de Construir (Solo Criado) começou a ser estudado no Brasil a na década de 1970, culminando com a publicação da Carta de Embu (1976), na qual um grupo de estudiosos do Urbanismo e do Direito estabeleceram os parâmetros do instituto. Esse documento estabelece:

“Admite-se que, assim como o loteador é obrigado a entregar ao poder público áreas destinadas ao sistema viário, equipamentos públicos e lazer, igualmente o criador de solo deverá oferecer à coletividade as compensações necessárias ao reequilíbrio reclamado por solo adicional.”

O poder público, portanto, pode recuperar a valorização imobiliária decorrente do solo adicional. Nesse sentido, a Outorga Onerosa aproxima-se da operação consorciada.

Por outro lado, ambas diferem nos resultados urbanísticos e no efeito redistributivo dos recursos auferidos com as contrapartidas. A operação urbana concentra recursos num determinado perímetro e tem enfoque transformador do território nele contido. Já a Outorga Onerosa distribui os recursos em ampla porção do território, tendo como enfoques a regularização fundiária, a execução de programas e projetos habitacionais de interesse social, a implantação de equipamentos urbanos e comunitários e a criação de espaços públicos de lazer e áreas verdes, dentre outros.

Existem ainda outros tipos de incentivos urbanísticos, como a alteração de uso e de normas de edificação. Alguns exemplos: gabarito de altura máxima, recuos, taxa de ocupação. Todos eles apresentam um caráter de excepcionalidade às normas gerais de uso e ocupação do solo, portanto são passíveis de cobrança de contrapartida.

As operações consorciadas podem atender a algumas das principais diretrizes urbanísticas definidas no Estatuto da Cidade, tais como:

- Distribuição dos benefícios e ônus decorrentes do processo de urbanização;
- Valorização dos imóveis urbanos • Cooperação entre os governos, a iniciativa privada e os demais setores da sociedade no processo de urbanização;
- Ordenação e controle do uso do solo, para evitar a utilização inadequada ou especulativa dos imóveis urbanos.

Uma crítica às Operações Urbanas é que elas funcionam onde já existe interesse do mercado imobiliário, fazendo com que os investimentos se concentrem nas regiões em que já estão presentes, aumentando assim as disparidades urbanas, havendo a expulsão da população

residente na área de intervenção. Esse resultado contraria o *Land Readjustment*, pois não há participação direta da população na definição dos projetos de intervenção.

#### **2.4 Os Certificados de Potencial de Construção – CEPACs**

O Estatuto da Cidade instituiu o CEPAC, visando antecipar os recursos oriundos das contrapartidas provenientes da concessão de potencial adicional de construção nas áreas de operação urbana. Em São Paulo, o CEPAC foi previsto na Operação Urbana Faria Lima em 1995, mas só foi aplicado após a aprovação do Estatuto da Cidade em 2001, por meio da Operação Urbana Água Espraiada e da revisão da Faria Lima em 2004 (Sandroni, 2008).

De acordo com a Prefeitura do Município de São Paulo (2007), o procedimento básico de aplicação desse instrumento do CEPAC inicia-se com os estudos urbanísticos que definem um estoque de potencial adicional de construção. A partir de então, estipula-se um valor mínimo de cada CEPAC e uma equivalência em m<sup>2</sup> de terreno e m<sup>2</sup> adicional, para uso residencial e uso não residencial e por setores. Assim, um certificado pode custar mais para determinado uso em um setor do que em outro, mas todos estão atrelados a uma única operação urbana. Aprovada a lei da Operação Urbana, esse instrumento financeiro pode ser negociado livremente na Bolsa de Valores. Sua emissão é controlada pela Comissão de Valores Mobiliários, e a Prefeitura pode promover leilões de CEPACs, sempre atrelados aos projetos previstos no programa de obras da operação urbana. Dessa forma, cada certificado confere ao seu titular os Direitos Urbanísticos Adicionais, que poderá trocá-lo por metro quadrado adicional de construção ou direito de mudança de uso do imóvel (residencial ou comercial).

Através desse instrumento, a Prefeitura pode antecipar os recursos e executar previamente as infraestruturas necessárias para absorver a demanda por Direitos Urbanísticos Adicionais. As distribuições públicas dependem de prévio registro junto à Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e são realizadas mediante leilões públicos no Mercado de Balcão Organizado da Bovespa para financiamento das Intervenções em cada Operação Urbana. Os CEPACs são colocados privadamente quando forem usados diretamente para pagamento de obras e desapropriações previstas nas Intervenções, bem como garantia de financiamento obtido junto a instituições financeiras para custeio das referidas Intervenções.

Até a entrada em vigor do Estatuto da Cidade, a engenharia financeira das Operações Urbanas previa o pagamento dos Direitos Urbanísticos Adicionais na forma autorizada em cada lei autorizativa de Operação Urbana, no momento da aprovação do empreendimento. Exigia-se

que o interessado fosse detentor de um lote e que contemplasse um projeto do empreendimento. O interessado dava entrada a esse projeto nos órgãos de aprovação da Prefeitura, era feito o cálculo da contrapartida para aquisição dos Direitos Urbanísticos Adicionais e, no momento da aprovação, pagava, em dinheiro ou obra, dependendo da situação, o valor correspondente aos benefícios outorgados pelo município.

Para a Prefeitura, os valores das contrapartidas pagos em dinheiro entravam na conta vinculada a cada Operação Urbana somente à medida que os projetos eram aprovados. Isso tornava a execução de cada Intervenção prevista na lei específica um processo dependente da aprovação de muitos projetos e do pagamento das respectivas contrapartidas (quando envolvendo Outorga Onerosa de Direitos Urbanísticos Adicionais), tornando sua aplicação longa e complexa.

Para a cidade, o perímetro da Operação Urbana sofria todo o impacto de empreendimentos que se instalavam muito antes das obras de infraestrutura necessárias para absorver o aporte de área adicional de construção que a lei outorga. A mesma lei que cria a Operação Urbana Consorciada deve prever a emissão, pelo Município, de quantidade determinada de CEPACs, que podem ser alienados em leilão ou utilizados diretamente no pagamento das obras e desapropriações necessárias à própria operação.

A quantidade de CEPAC que pode ser emitida no âmbito de Operação Urbana Consorciada é limitada. Além disso, há estoques máximos para sua utilização em diversos setores que abrangem a Operação Urbana Consorciada, para não haver concentração por eventual utilização em um único setor.

Uma vez esgotado o Estoque em determinado setor da Operação Urbana Consorciada, os CEPACs remanescentes ou em circulação podem ser utilizados somente nos outros setores da mesma operação.

Após a utilização do Estoque de CEPACs emitidos no âmbito de determinada Operação Urbana Consorciada, não é possível construir acima dos limites básicos impostos pela legislação ou modificar o uso dos imóveis naquela área.

Há vinculação expressa do emprego dos recursos obtidos com a alienação de CEPACs à determinada Intervenção (obra ou desapropriação), não se podendo destinar os valores para quaisquer outros fins.

Esse instrumento pode ser empregado privadamente quando utilizado para pagamento das obras e desapropriações previstas nas Intervenções, bem como para oferecimento em garantia de financiamentos obtidos junto a instituições financeiras para custeio das referidas Intervenções. Nesses casos, seu valor é negociado no último leilão público e, caso ainda não tenha ocorrido nenhum leilão público, seu valor é estabelecido na lei específica que criar a Operação Urbana Consorciada. Em nenhuma hipótese o valor dos CEPACs pode ser inferior ao preço mínimo de emissão previsto na lei específica.

A Secretaria de Finanças, a Secretaria Municipal de Planejamento (SEMPPLA) e a Empresa Municipal de Urbanização (EMURB) decidem pela colocação privada dos CEPACs para o custeio da Intervenção.

No pagamento de desapropriações necessárias às Intervenções da Operação Urbana Consorciada, os CEPACs podem ser utilizados, de forma direta, somente após a publicação do decreto de expropriação, a avaliação administrativa ou judicial para determinação do valor do bem e a celebração de documento comprobatório da concordância do expropriado em receber a indenização, ou parte dela, em CEPAC.

Para adquirir esse instrumento financeiro não é preciso ser proprietário de terrenos, nem adquirir um imóvel na área da Operação Urbana Consorciada. Caso seu titular seja ou venha a ser proprietário de imóvel na área da Operação Urbana Consorciada, ele pode, observados os Estoques, vinculá-los a seu terreno, aumentando, assim, a área disponível para construção (e, portanto, potencialmente o valor de seu imóvel) e/ou alterando os parâmetros de utilização de seu terreno.

A Prefeitura divulga trimestralmente o Estoque de CEPAC disponível, bem como sua quantidade vinculada a cada região. Aquele que tiver interesse em utilizar os benefícios conferidos por esse instrumento apresenta seu projeto à Secretaria de Habitação (SEHAB), que calcula o valor da contrapartida da Outorga Onerosa a ser paga em CEPACs.

O interessado adquire-os e informa à EMURB a sua titularidade, que por sua vez emite a certidão de pagamento de Outorga Onerosa em CEPAC em três vias, ficando uma no órgão, outra com o interessado, e a terceira é diretamente encaminhada à SEHAB. Com o recebimento da referida certidão de pagamento de Outorga Onerosa, é expedido o competente alvará ou a certidão de vinculação ao terreno, conforme o caso.

Quando da emissão da certidão de pagamento de Outorga Onerosa, a EMURB comunica ao Banco Escriturador para que proceda ao cancelamento dos CEPACs utilizados, e atualiza os controles do Estoque da Operação Urbana Consorciada, que são periodicamente comunicados ao mercado.

São distribuídos CEPACs para custeio de novas Intervenções, no âmbito da mesma Operação Urbana Consorciada, somente quando:

- for concluída a Intervenção ou grupo de Intervenções anterior;
- tenham sido assegurados, comprovadamente por meio de depósito na Conta Vinculada, os recursos necessários à conclusão da Intervenção ou grupo de Intervenções anterior.

Caso tenha sido concluída a Intervenção ou grupo de Intervenções e remanesçam recursos obtidos com a alienação de CEPACs no mercado, eles podem ser transferidos para a Intervenção seguinte da Operação Urbana Consorciada, sendo vedada sua utilização para qualquer outro fim.

Na apuração do valor total da Intervenção, ou conjunto de Intervenções, para efeito de cálculo da quantidade total de CEPACs que podem ser distribuídos, deverão ser incluídas todas as respectivas despesas, devidamente comprovadas, inclusive estudos, projetos e custos de administração da Operação Urbana Consorciada.

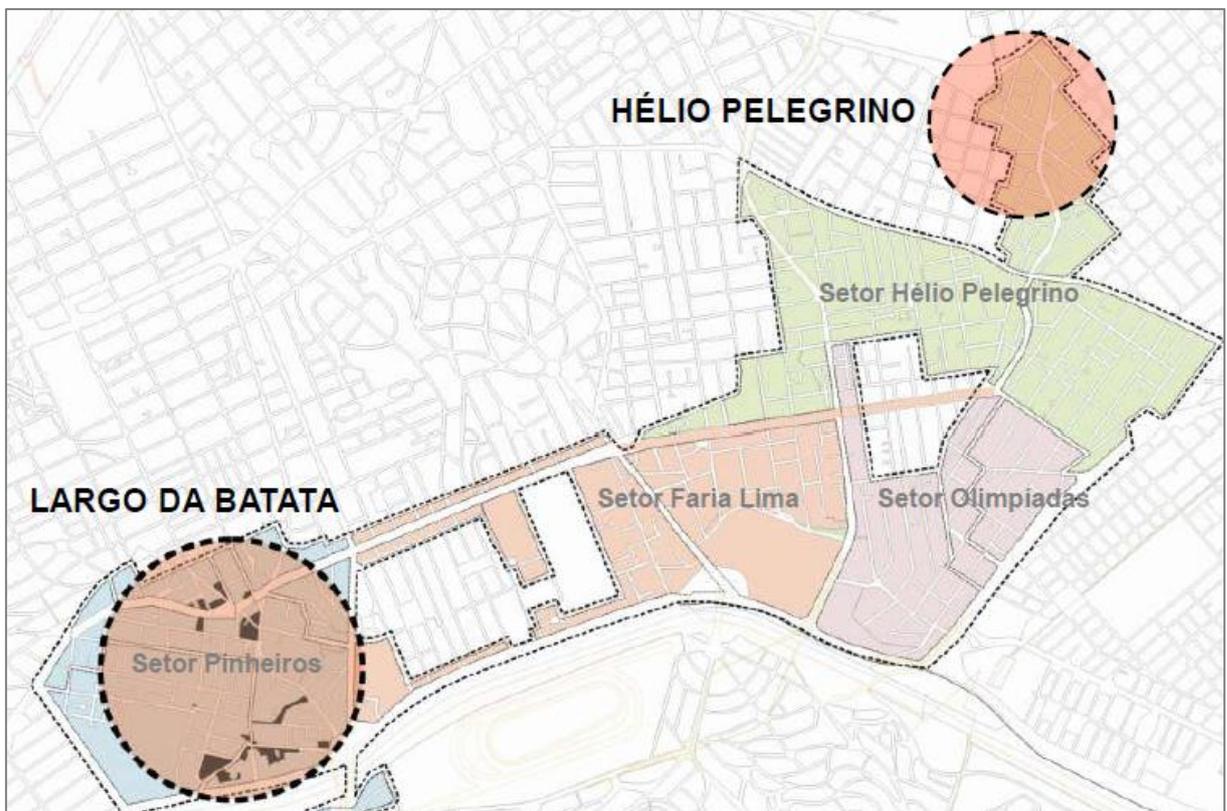
#### **2.4.1 Operação Urbana Faria Lima**

Essa Operação foi aprovada pela Lei 11.732 de 1995, com o objetivo de promover o prolongamento da Avenida Faria Lima e consolidar uma via paralela à Marginal do Rio Pinheiros, aliviando a saturação da rede viária da região sudoeste do município.

Ela engloba uma área nobre da cidade onde a atividade do mercado imobiliário, no momento da aprovação da lei, estava se intensificando. Seu perímetro se distribui basicamente entre a Avenida Faria Lima e a Marginal do Rio Pinheiros, no trecho entre a Avenida dos Bandeirantes, ao sul, e a Rua Frederico Hermann Junior, ao norte, perfazendo 450 ha. Esse perímetro foi dividido em ADB (Área Diretamente Beneficiada), distribuída em cinco subperímetros praticamente ao redor dos trechos resultantes das melhorias viárias, e o restante em AIB (Área Indiretamente Beneficiada). Em relação à ADB, com menor porção territorial, foi definido estoque de 1.250.000 m<sup>2</sup>. Para a AIB, estabeleceu-se 1.000.000 m<sup>2</sup>.

A Operação Faria Lima contabilizou o maior fluxo de recursos dentre todas as operações urbanas instituídas em São Paulo: entre 1995 e 2004 foram obtidos cerca de R\$ 300 milhões provenientes da contrapartida financeira, em função da concessão de potencial adicional de construção.

Essa Operação teve como principal resultado urbanístico os investimentos viários realizados antes da aprovação da Lei da Operação Urbana. Tratava-se principalmente do prolongamento da Avenida Faria Lima, conectando seus extremos com a Avenida Pedroso de Moraes, ao norte, e, ao sul, com a Avenida Hélio Pelegrino – cujo traçado, também estendido, ligou-se à Avenida República do Líbano. Em relação ao investimento privado, houve ampla adesão de novos empreendimentos, notavelmente os de alto padrão e não residenciais. No ano de 2004 foi aprovada a revisão da Operação Urbana Faria Lima. O CEPAC foi regulamentado, o perímetro foi revisto em setores e o estoque de potencial adicional de construção foi redistribuído nos correspondentes setores. A figura 2 mostra os diversos setores desta operação urbana.



**Figura 2: Mapa da Operação Urbana Faria Lima.**  
Fonte: EMURB (2008).

A Operação Urbana Consorciada Faria Lima prevê as seguintes Intervenções:

- Pagamento de desapropriações ainda não efetivadas, referente ao cumprimento das Leis 5399/57, 7104/68, 8126/74 e 8274/75 e ao de Leis específicas que concernem a melhoramentos viários contidos no perímetro da Operação Urbana Consorciada Faria Lima;
- Realização de todas as obras e serviços necessários à implantação dos melhoramentos constantes, referentes a: a) demolições, remanejamento de redes e interferências, terraplenagem, remoção de entulho; b) pavimentação de vias e espaços públicos, drenagem urbana e redes de infraestrutura básica e de serviços públicos, iluminação, sinalização e semáforos; c) mobiliário urbano, comunicação visual, paisagismo e ajardinamento;
- Realização de todas as obras e serviços necessários à implantação dos seguintes equipamentos: a) viaduto da Av. Bandeirantes, na confluência da Praça Roger Patti com as Ruas Guaraiúva e Ribeiro do Vale; b) acessos viários e passarelas do conjunto das pontes Eusébio Matoso e Bernardo Goldfarb sobre o Rio Pinheiros; c) acessos viários e passarelas da ponte Cidade Jardim sobre o Rio Pinheiros; d) novo Terminal de ônibus, para o remanejamento ou transferência do existente nas proximidades do Largo da Batata, com instalações para lojas e estacionamento coletivo e demais melhoramentos destinados ao transporte coletivo;
- Provisão de Habitação de Interesse Social, melhoramento e reurbanização em locais definidos pelos órgãos competentes, destinados à população favelada residente na área da presente Operação Urbana e na região de seu entorno, de acordo com as seguintes prioridades de atendimento: Favela da Rua Coliseu, Favela do Real Parque, Favela Panorama;
- Construção de habitações multifamiliares para venda financiada à população residente em área objeto de desapropriação e que esteja interessada em continuar morando na região;
- Aquisição de imóveis para implantação de praças e equipamentos institucionais necessários para comportar o incremento populacional decorrente da Operação Urbana;
- Construção de passagem em desnível nos cruzamentos da Av. Faria Lima com a Av. Rebouças/Eusébio Matoso e Cidade Jardim;
- Execução de Boulevard, na Av. Juscelino Kubitscheck, do túnel Tribunal de Justiça até a Av. Marginal Pinheiros, incluindo as conexões com a Av. Marginal Pinheiros sentido sul;

- Execução de intervenção de requalificação urbana do Largo da Batata.

As duas pontes estaiadas sobre o Rio Pinheiros estão concluídas. Os demais projetos encontram-se em execução ou avaliação.

#### **2.4.2 Operação Urbana Água Espraiada**

A Operação Urbana Água Espraiada foi instituída após a conclusão da obra de um trecho dessa avenida, como forma de melhorar a infraestrutura viária através do adensamento e da complementação de intervenções urbanas necessárias. Para tanto, dispõe-se do mecanismo da Outorga Onerosa para o financiamento dessas intervenções.

Seu perímetro distribui-se pelo conjunto urbano formado pelas quadras ao longo da Av. Jornalista Roberto Marinho e a Marginal do Rio Pinheiros, totalizando 1.426 hectares.

A Operação Água Espraiada foi a primeira a ser aprovada pós-Estatuto da Cidade e apresentou alguns avanços relativos à adequação da concepção, até então corrente, das leis de operações urbanas às novas exigências apresentadas no Estatuto. Essas adequações podem ser assim resumidas:

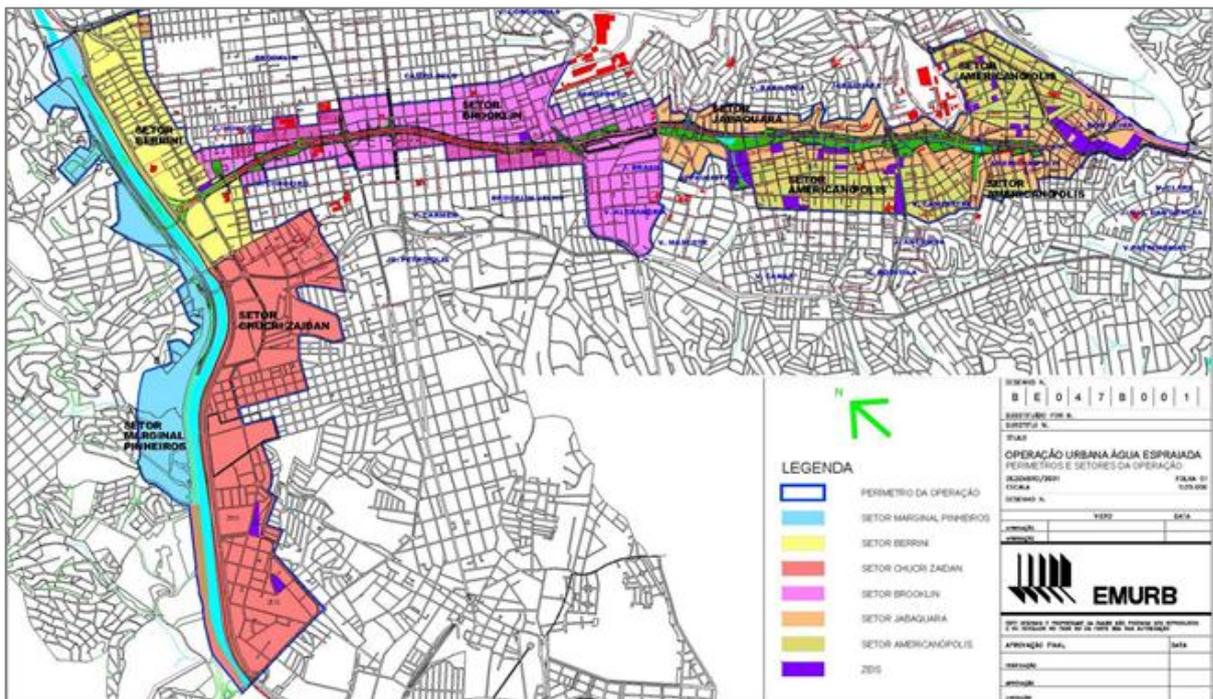
- Definição do pagamento da contrapartida em CEPAC;
- Definição da conversão de CEPAC em m<sup>2</sup> diferenciada por setores;
- Estabelecimento de parâmetros urbanísticos diferenciados por setores;
- Desenvolvimento e aprovação de Estudo de Impacto Ambiental, em que pese sua elaboração em momento posterior à aprovação da lei dessa operação urbana – Lei 13.260/01.

Foram realizados leilões para emissão de CEPACs com o objetivo de construir duas pontes estaiadas sobre o rio Pinheiros – a fim de interligar a Av. Jornalista Roberto Marinho com a Marginal do Rio Pinheiros – e executar 1.800 unidades habitacionais de interesse social para o atendimento das famílias moradoras das favelas atingidas.

As principais Intervenções previstas na lei incluem:

- Prolongamento da Av. Jornalista Roberto Marinho e da Av. Lino de Moraes Leme até a Rodovia dos Imigrantes, numa extensão de aproximadamente 4,5 quilômetros;

- Abertura de duas vias laterais (uma de cada lado) à Av. Jornalista Roberto Marinho no trecho já executado, desde a Av. Engenheiro Luis Carlos Berrini até a Av. Washington Luis, para distribuição do tráfego local;
- Construção de duas novas pontes estaiadas sobre o rio Pinheiros, ligando a pista sul da Av. Marginal Pinheiros e o bairro do Morumbi à Av. Jornalista Roberto Marinho;
- Prolongamento da Av. Chucri Zaidan até a Av. João Dias;
- Construção de passagens em desnível nos cruzamentos da Av. Água Espraiada com as avenidas Pedro Bueno, Santo Amaro e Hélio Lobo, e com as ruas Guaraiuva, Nova Iorque, Vitoriana, Franklin Magalhães e George Corbisier;
- Implantação de passarelas de pedestres e construção de 8.500 unidades habitacionais destinadas aos moradores das favelas que estão no eixo das Intervenções previstas.



**Figura 3: Mapa da Operação Urbana Água Espraiada.**  
Fonte: EMURB (2008).

Todos os projetos estão em fase de execução ou de avaliação. As duas pontes estaiadas estão concluídas. A figura 3 mostra o mapa da Operação Urbana Água Espraiada dividida em seis setores: Marginal Pinheiros, Chucri Zaidan, Brooklin, Berrini, Jabaquara e Americanópolis.

### **3. OPÇÕES REAIS EM EMPREENDIMENTOS IMOBILIÁRIOS**

O preço do metro quadrado em São Paulo é um dos maiores do Brasil (FIPE, 2011), perdendo apenas para o Distrito Federal e para o Rio de Janeiro. Entretanto, pode-se observar um grande número de lotes vagos e subutilizados, como, por exemplo, para estacionamentos. O fato de que os proprietários mantêm a terra subutilizada por períodos prolongados indica que o terreno pode trazer mais lucro como um investimento potencial de construção no futuro.

Para entender por que alguns lotes permanecem subutilizados, é preciso determinar como a terra é valorizada sob duas alternativas. O valor do terreno vago que considera uma construção imediata é simplesmente o do mercado da construção (incluída a terra) menos a preparação do lote e seus custos de construção (o que é referido na literatura do mercado imobiliário como um valor residual). Entretanto, avaliar o terreno como um investimento em potencial para construção não é tão simples, pois os preços do mercado imobiliário no futuro são incertos.

O modelo desenvolvido em Titman (1985) é baseado no modelo de avaliação de opções e provê uma equação para precificar terrenos com potencial de construção. Ele é intuitivo e inclui a possibilidade de se adiar um investimento, pois pode ser vantajoso esperar por informações adicionais antes de se decidir sobre especificações do projeto. Isso demonstra que a opção de adiar um investimento possui valor.

Por conta das razões apontadas acima e em razão de sua simplicidade, esse modelo será apresentado aqui. Para aprofundar este estudo, será apresentado, em seguida, o modelo contínuo no tempo e nos valores de Williams (1991). E, por fim, o modelo de Quigg (1993), com algumas observações e ajustes.

Na verdade, este trabalho estende o modelo de Quigg, ao incluir o uso de instrumentos, como os CEPACs, que permitem aumentar o potencial de construção, alterando a densidade máxima de construção definida pela lei de zoneamento urbano e impactando diretamente no momento e densidades ótimos de construção.

### 3.1 Revisão Bibliográfica

O termo “opções reais” foi criado por Myers (1977), quatro anos após a publicação do artigo de Black & Scholes (1973). Myers caracterizou as oportunidades de investimento das firmas em ativos reais (por exemplo, projetos de investimento) como sendo análogas a opções de compra sobre esses ativos.

Embora a literatura sobre mercado imobiliário seja extensa, a ideia de que investimentos imobiliários podem ser modelados como um problema de opções reais é recente, sendo inicialmente desenvolvida por Shoup (1970), Arnott e Lewis (1979) e Titman (1985).

Um dos trabalhos pioneiros foi de Shoup (1970). Ele foi um dos primeiros a considerar o tempo ótimo de transição de um terreno rural para um terreno urbano. Para Shoup, o investimento é irreversível, ou seja, a propriedade, uma vez construída, determina o uso do imóvel para sempre. O autor afirma que o tempo ótimo de construção depende da taxa de desconto, dos impostos, dos fluxos de caixa decorrentes da venda do imóvel e dos preços do terreno no futuro.

Arnott e Lewis (1979) investigam a economia da transição do uso da terra de rural para urbana. Um modelo (baseado em Shoup, para um equilíbrio parcial) é usado para determinar quando e com qual densidade é vantajoso construir para maximizar o valor presente do terreno. Eles o testam em cidades canadenses de 1961 a 1975. Ele também é usado para estimar a elasticidade de substituição entre terra e custo de construção.

Titman (1985) analisa o valor de postergar os investimentos imobiliários em terrenos urbanos em *Los Angeles*, EUA. O autor afirma que um terreno vago pode ser visto como uma opção para a construção de vários tipos de imóveis, considerando, por exemplo, que alguns investidores preferem manter um terreno vago ou subutilizado, por ser mais valioso como um terreno potencial para construção futura do que como um terreno para construção imediata. Assim, quanto mais há incerteza sobre os preços futuros, mais valiosa é a opção de selecionar o tipo de construção, valorizando o terreno vago.

Majd e Pindyck (1987) relacionam o tempo de construção, o valor da opção e as decisões de investimento. Essas são realizadas sequencialmente. Por exemplo, o tempo de construção é flexível e pode ser ajustado de acordo com novas informações sobre o mercado. Os métodos de fluxo de caixa tradicionais que tratam o investimento como fixo ignoram essa flexibilidade

e subavaliavam um projeto. Os autores determinam os efeitos do tempo de construção, os custos de oportunidade e a incerteza nas decisões de investimento, mostrando que o método tradicional de valor presente líquido pode levar a grandes erros.

Em Capozza e Sick (1988), os proprietários de terreno têm a opção de converter a terra agrícola em urbana. O terreno urbano é precificado em um mercado de capitais competitivo e completo, e o preço da terra agrícola é calculado usando técnicas de opções reais. O ponto ótimo de conversão é expresso em termos de distância em relação aos centros de cidades, bem como a demanda por terra urbana. Os resultados delimitam a área urbana e o multiplicador da renda das terras agrícolas. Em um artigo posterior, Capozza e Sick (1988) precificam o terreno vago e determinam o tempo e a densidade ótimos de construção. Sua solução é dada por um modelo de avaliação de risco neutro com um processo de Wiener da evolução dos preços, bem como uma função de produção de Cobb-Douglas para a densidade.

Williams (1991) afirma que, sujeito às restrições legais, o proprietário de um terreno vago pode determinar o tempo e a densidade ótimos para construir um imóvel. Outra alternativa é abandonar sua propriedade. O valor dessas opções depende da evolução estocástica no tempo, do fluxo de caixa resultante da venda e dos custos de construção. O problema da precificação de opções é resolvido para o tempo e a densidade ótimos, o tempo ótimo de abandono, e o resultado é o valor do terreno vago e da propriedade construída. Williams também propõe uma opção de abandono como alternativa ao desenvolvimento dos terrenos, incluindo em seu modelo incertezas de custo e preço.

Quigg (1993) analisa os preços de terrenos em *Seattle*, EUA, e testa um modelo para avaliar uma opção de esperar para investir, colocando em prática as implicações de Titman (1985) e agregando o tempo contínuo de Williams (1991). Baseado em transações imobiliárias, ela revela que há um prêmio pela espera da construção, ao comparar o valor de mercado do imóvel com sua precificação por opções reais.

Grenadier (1996) introduz o conceito de jogo de opções para analisar o comportamento do mercado imobiliário, associando o tempo de investimento como estratégia para acelerar ou reduzir as atividades dos projetos em desenvolvimento. Seu modelo provê uma explicação para mercados em crescimento perante uma demanda e valores de propriedades declinantes. Através da teoria dos jogos, ele explica o *irrational overbuilding*, que é considerado um comportamento irracional, pois ocorre um aumento da oferta apesar da baixa demanda (Grenadier, 1996). O autor afirma que existe um intervalo de tempo entre a construção do

imóvel e os choques de demanda e infere um fundamento racional para o problema que diz respeito à opção de esperar para investir.

Cappozza e Li (1994) desenvolvem um modelo que analisa como as opções de investir interagem com o tempo e com o valor de projetos comerciais e residenciais. Eles modelam a decisão de substituir o capital durável quando a intensidade é variável. Decisões desse tipo incluem a reconstrução do terreno. Eles consideram o valor do projeto, o tempo do investimento, e a intensidade da construção. A conclusão é que a intensidade interage com o tempo, os impostos e os valores do projeto.

Williams (1997) afirma que os ativos reais podem ser reconstruídos (demolidos ou modernizados) repetidamente. Ao contrário dos ativos financeiros, a opção de reconstruir pode ser exercida infinitas vezes. Para um ativo real depreciável, a reconstrução é, em média, frequente e resulta em um valor de mercado maior do que se o investimento fosse irreversível.

Clarke e Reed (1998) consideram que os preços de mercado das unidades e os custos de capital são aleatórios e evoluem segundo o movimento geométrico browniano. Para eles, o proprietário de um terreno vago não influencia o mercado e sua decisão ótima não afeta preços ou custos dos outros proprietários.

Cauley e Pavlov (2002) estudam um mercado residencial específico em *Los Angeles*, EUA, modelando uma opção de espera para vender, tendo como variável de análise o valor do imóvel, menos a dívida hipotecária. Eles observam que o mercado imobiliário, tanto para imóveis comerciais quanto para residenciais, responde a grandes choques negativos de demanda com volume de transações e liquidez menores. Seus resultados mostram que, quando um proprietário possui pouco ou nenhum patrimônio, devido à sua dívida hipotecária, o valor de esperar para vender o imóvel pode ser maior do que o custo líquido da dívida.

Yavas e Sirmans (2005) e Bulan, Mayer e Sommerville (2004) examinam transações imobiliárias em *Vancouver*, Canadá, e comprovam que a existência de competição diminui o valor da opção de esperar para investir.

Paxson (2005) desenvolve um modelo de propriedade para hotéis que comporta oito diferentes opções, dentre elas a opção de mantê-la ociosa, de construir, de expandir, de abandonar e de gerenciar os serviços.

Especificamente, alguns estudos destacam a percepção dos compradores na avaliação de preço em função da vizinhança, localização, amenidades e taxas de financiamento, como Clapp (2004), Frew e Jud (2003) e Clapp e Giaccotto (2002).

Outros estudos analisam essa percepção em função de fatores financeiros que influenciam a decisão de investimento imobiliário, tais como liquidez (Cauley & Pavlov, 2002; Wang & Zhou, 2002) e custos de construção (Guirguis, Giannikos, & Anderson, 2005; Jud & Winkler, 2002).

Poucos estudos, voltados para a avaliação imobiliária no Brasil, consideraram a flexibilidade inerente aos projetos imobiliários, como a capacidade de se construir no tempo e densidade ótimos, considerando modelos estocásticos.

Medeiros (2001) testa o modelo de Williams para a cidade do Rio de Janeiro e inclui, nele, impostos e o fato de a construção levar tempo para ser concluída. Ele testa quais as influências da receita do terreno vago, do custo de escala, das restrições impostas pela lei de zoneamento, da incerteza, dos impostos e do tempo de construção no tempo e densidade ótimos e no valor do terreno vago.

Ribeiro (2004) mostra que a utilização da metodologia de opções reais na avaliação de projetos de incorporações imobiliárias pode ser factível e intuitiva, e avalia as diversas flexibilidades existentes e a variação de valor através de uma análise de sensibilidade.

Rocha, Salles, Alcaraz, Sardinha e Teixeira (2007) utilizam a metodologia de opções reais para analisar também o mercado imobiliário do Rio de Janeiro e determinar o melhor momento para investir nas diversas fases do projeto e calcular o valor máximo a ser pago pelos direitos exclusivos de uso do terreno, considerando a opção de abandono.

Fávero (2007) estuda o mercado imobiliário de lançamentos residenciais da região metropolitana de São Paulo, usando um modelo de regressão hedônica de Rosen (1974). O método permite o levantamento das características dos imóveis e das regiões, para a composição das condições comerciais dos imóveis que influenciam a oferta e a demanda, de acordo com perfis sociodemográficos de cada região.

### 3.2 O modelo de Titman

O modelo de Titman (1985) adapta o modelo de Fisher, Black e Scholes (1973) e de Merton (1973) de avaliação de derivativos, para seu uso em opções reais, com foco em terrenos urbanos, e é similar ao apreçamento binomial de opções de Cox, Ross e Rubinstein (1979) e de Rendleman e Bartter (1979). A intuição é que um terreno vago pode ser visto como uma opção para comprar um número de possíveis unidades de uma construção por um preço de exercício que seja igual ao respectivo custo de construção.

As construções no modelo de Titman (1985) são caracterizadas por seu tamanho ou número de unidades,  $q$ . O custo de construção  $C$  é uma função crescente e convexa do número de unidades, ou seja,  $dC/dq > 0$  e  $d^2C/dq^2 > 0$ . O custo é uma função convexa, pois à medida que o número de unidades construídas aumenta, o custo da mão de obra por andar também aumenta e as fundações do prédio precisam ser mais fortes. Outra premissa é que, uma vez construído um prédio de determinado tamanho, é proibitivamente caro adicionar unidades. O modelo de Titman (1985) é de tempo discreto e não estocástico.

Dadas essas premissas, o tamanho da construção que maximiza o lucro do proprietário que deseja construir imediatamente satisfaz o problema:

$$\text{Max } \pi(p_0) = p_0 q - C(q) \quad (1)$$

Onde  $\pi$  representa a diferença entre  $p_0$  (o preço de mercado atual por unidade) e o custo de construção total  $C(q)$ . Diferenciando (1) em relação a  $q$ , e igualando-se a zero para obter-se o valor de  $q$  que maximiza o lucro, a solução para o problema de maximização é escolher um número de unidades que satisfaz a condição:

$$\frac{\partial \pi(p_0)}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dC}{dq} = p_0 \quad (2)$$

O tamanho ótimo que satisfaz essa equação será denominado  $q^*$ . Dada essa decisão ótima, o valor da terra para construir imediatamente,  $\pi(p_0)$ , é uma função crescente e convexa de  $p_0$ . Assim, o proprietário pode mudar  $q^*$  em resposta a mudanças em  $p_0$ .

O modelo considera duas datas, pois, se o proprietário não construir na data presente ( $t=0$ ), ele poderá fazê-lo na data 1 se  $\pi(p_1) > 0$ . A incerteza, no modelo de Titman (1985), é sobre o preço de mercado das unidades construídas. Os custos de construção são conhecidos e constantes. Além disso,  $p_1$ , o preço da unidade na data 1, assume dois valores possíveis:  $p_h$  e  $p_l$ , onde  $p_h > p_l$ . Considera-se também a existência de um ativo livre de risco  $R_f$  e de uma taxa

de aluguel por unidade  $R_t$ . Assume-se que o mercado é perfeito e que não há impostos nem custos de transação.

O terreno vago depende da propriedade construída. Seu valor na data 1 é determinado por (ou derivado de) outro ativo. Uma vez que existem três investimentos (terreno, unidades construídas e um ativo livre de risco), o valor do terreno vago pode ser replicado como uma combinação linear de dois deles, em um ambiente sem arbitragem e sem risco.. Supondo ausência de arbitragem e denotando por  $s_h$  e  $s_l$  os preços de estado nos dois estados da natureza na data 1, o valor do terreno vago ( $V$ ) na data 0 pode ser determinado como:

$$V = \pi(p_h)s_h + \pi(p_l)s_l \quad (3)$$

Para resolver a equação (3) é preciso determinar os preços de estado que devem satisfazer as seguintes equações:

$$p_0 = s_h p_h + s_l p_l + R_t(s_h + s_l) \quad (4)$$

$$\frac{1}{1 + R_f} = s_h + s_l \quad (5)$$

A equação (4) indica que o preço na data  $t=0$  de uma unidade da construção deve ser igual à expectativa do valor presente dos ganhos dessa unidade em  $t=1$ . A soma de  $s_h$  e  $s_l$  representa uma probabilidade igual a 1. O preço pode assumir dois valores dependendo do estado da natureza que se realize em  $t=1$ , sendo trazido a valor presente (equação 5) considerando o ganho com o aluguel dessa unidade.

A equação (5) significa que os preços de estado são os descontos que trazem os valores da data  $t=1$  para a data  $t=0$  e, portanto, devem ser iguais ao mesmo desconto utilizando a taxa de juros sem risco.

Assim, pode-se isolar os valores para os preços de estado para cada estado da natureza:

$$s_h = \frac{p_0 - \left( p_l + \frac{R_t}{1+R_f} \right)}{p_h - p_l} \quad (6)$$

$$s_l = \frac{\left( p_h + \frac{R_t}{1+R_f} \right) - p_0}{p_h - p_l} \quad (7)$$

A regra de decisão de quando construir será realizada em cada período após a observação dos preços de mercado. Se o valor do terreno vago na data 0 for superior à função

lucro nessa mesma data, isto é, se  $V > \pi(p_0)$ , será ótimo manter o terreno vago e adiar a construção para a data 1. Quando  $V < \pi(p_0)$ , será ótimo construir imediatamente com o número de unidades determinado pela maximização da função lucro  $\pi(p_0)$ .

Considere um exemplo numérico no qual um investidor poderia construir num mesmo terreno vago 6 ou 9 unidades. O custo de se construir 6 unidades é de \$80.000 e de 9 unidades é \$90.000. O preço de mercado atual das unidades é de \$100.000. O aluguel anual é de \$8.000 por unidade e a taxa de juros livre de risco anual é de 12%. Se as condições do mercado forem favoráveis no próximo ano, as unidades serão vendidas por \$120.000, se forem desfavoráveis, serão vendidas por \$90.000.

Uma vez que o custo marginal unitário para 9 unidades é de \$110.000, o investidor fará 6 unidades e terá um lucro de \$120.000 na data 0. Entretanto, se ele optar por esperar um ano para construir e as condições de mercado forem desfavoráveis, ele fará 6 unidades e terá um lucro de \$60.000. Caso contrário, ele construirá 9 unidades e terá um lucro de \$270.000, em condições favoráveis de mercado. Substituindo esses números na equação (3) e se a construção for realizada no ano seguinte, obtêm-se um valor corrente para o terreno de \$141.071. Já que esse valor é maior do que o lucro de se construir imediatamente, é preferível manter o terreno vago.

Se o terreno for vendido por menos do que isso, os investidores terão lucro na arbitragem ao comprá-lo, pois reduzem o risco, vendendo as unidades rapidamente. Por exemplo, se o terreno for vendido por \$120.000, os investidores podem ter um ganho livre de risco sem investimento inicial, já que é possível vender rapidamente 7 unidades e investir o restante da transação em um ativo livre de risco. As 7 unidades cobrem o risco (*hedge*) de se ter um terreno vago, pois a diferença entre o valor das unidades, nos estados da natureza favoráveis e desfavoráveis de \$210.000, ultrapassa os valores dos terrenos nos dois estados. Portanto, o investimento citado retorna um ganho livre de risco de \$23.600. Uma vez que esses ganhos não existem no equilíbrio, os investidores precificarão o terreno por seu valor de equilíbrio de \$141.071.

Esse exemplo numérico ilustra os efeitos do preço atual das unidades, a taxa de juros, bem como a taxa de aluguel no valor do terreno. Conforme a incerteza cresce, o valor do terreno vago também cresce, reduzindo assim a atratividade da construção imediata, pois a incerteza sobre os preços futuros torna o tamanho da construção que será ótima no futuro mais incerto, aumentando a probabilidade de o tamanho ótimo atual ser subótimo.

Uma das formas de reduzir a incerteza é a imposição de restrições na altura do prédio, pois, quanto maior ela for, menor o conjunto de possibilidades de unidades a serem construídas, tornando assim o tamanho do prédio que será ótimo no futuro menos incerto. Uma das limitações no modelo de Titman (1985) é o fato de que a construção é considerada instantânea.

### **3.2 O Modelo de Williams (1991)**

Nos trabalhos de Fischer (1978), Margrabe (1978) e Stultz (1982), o preço de exercício é considerado como um processo geométrico de Wiener. Conforme estes dois últimos autores o preço de exercício é a taxa de câmbio entre dois ativos com risco. No trabalho de Williams (1991) o custo de construção ou preço de exercício também segue o preço geométrico de Wiener, mas, no seu caso, a opção pode ser exercida antes de sua maturidade.

A opção de desenvolver a propriedade difere das opções de compra e venda dos mercados de derivativos. Sujeito às limitações legais, o proprietário do terreno pode selecionar a escala ou a densidade para desenvolver sua construção. Se o custo de manter um terreno vago exceder suas receitas, o proprietário deverá abandonar seu terreno. Comparadas às opções financeiras, as reais são mais complexas e possuem um maior conjunto de variáveis.

Construir um imóvel é semelhante a exercer uma opção. O proprietário escolhe o tempo de construção dentro do que permitem as regulações legais. Essa opção torna-se mais valiosa com maiores volatilidades das receitas e dos custos de construção. Se os investidores podem trocar ativos substitutos continuamente sem custos de transação em um mercado de capitais perfeitamente competitivo, então o proprietário desenvolverá sua propriedade de maneira ótima quando seu valor no mercado for máximo. Por exemplo, maximizar o valor de mercado é ótimo se o mercado de capitais for perfeitamente competitivo e completo, mesmo se o imobiliário não for. Ademais, uma vez que a opção de construir nunca expira, o proprietário exercerá sua opção se o valor de seus fluxos de caixa exceder seus custos. Finalmente, a construção é irreversível. Como os prédios são duráveis, os imóveis são reconstruídos somente após melhorias, podendo ser considerados obsoletos com o tempo. Artigos sobre esse problema foram escritos por Titman (1985) e Capozza e Sick (1988). Outros autores são Anderson (1986), Arnott e Lewis (1979).

No artigo de Titman (1985) o desenvolvimento da propriedade urbana representa um problema de precificação de opções para um tempo discreto. Os resultados explicam tanto o

terreno construído quanto o terreno vago, por exemplo, prédios muito altos e a existência de estacionamentos. Uma vez que a opção de construir é valiosa, o projeto é adiado até que o valor da propriedade construída seja maior do que seu custo de construção.

Seguindo a lógica desenvolvida por Williams (1991), um investidor possui um terreno vago. Sujeito às limitações legais, ele pode escolher o tempo e a densidade para construir seu imóvel. A data na qual o proprietário adquiriu seu terreno é  $t = 0$ . A qualquer tempo  $t \geq 0$  ele pode construir na quantidade  $q$  que satisfaça  $1 \leq q \leq \delta_{\max}$ , em que  $\delta_{\max}$  denota a máxima densidade permitida pelas leis de zoneamento. A construção implica um custo  $q^\gamma x_1$ , que depende do custo unitário de densidade  $x_1$ , por unidade de tempo, e do custo de escala  $\gamma$ . O custo aumenta por unidade, ou seja,  $\gamma > 1$ . O imóvel construído em uma densidade  $q$  produz fluxos de caixa  $qx_2$  por unidade de tempo, que, no modelo de Williams, representa o fluxo de caixa de receita do aluguel do imóvel. O fluxo de caixa  $x_2$  por densidade é também medido por unidade de tempo. Como contraste, o terreno vago possui um fluxo de caixa por unidade de tempo  $\beta x_2$ . Com a constante  $0 \leq \beta \leq 1$  e dada a variável  $x_2$ , a construção aumenta o fluxo de caixa do proprietário.

Tanto os custos de construção quanto os fluxos de caixa são estocásticos no tempo. Por premissa, o custo unitário  $x_1$  e o fluxo de caixa do proprietário  $x_2$  seguem o processo geométrico de Wiener:

$$dx_i = \mu_i x_i dt + \sigma_i x_i dz_i \quad (8)$$

onde  $i = 1, 2$ . Essa especificação estocástica deve ser considerada como o limite contínuo de uma sequência com incrementos independentes cujas médias e cujas variâncias das taxas de crescimento são constantes.

Cada variável  $x_i$  possui uma taxa constante esperada de crescimento  $\mu_i$  e variância constante  $\sigma_i^2$ , ambas por unidade de tempo. A covariância  $\sigma_{12}$  entre as taxas de crescimento de  $x_1$  e  $x_2$  é constante no tempo. Nesse caso, o coeficiente de correlação  $\rho = \sigma_{12} / \sigma_1 \sigma_2$  também é constante. Com essa especificação o fluxo de caixa do terreno vago é quase sempre positivo.

Premissas adicionais são consideradas: a taxa de juros livre de risco  $i$  não varia. A evolução estocástica em  $x_1$  e  $x_2$  pode ser replicada em carteiras de ativos que são negociados continuamente sem custos de transação em um mercado de capitais perfeitamente competitivo. Nesse mercado existem duas carteiras de ativos,  $i = 1, 2$ , tal que os retornos da carteira  $i$  são perfeitamente correlacionados com os incrementos estocásticos  $dz_i$ , da equação

(8). Para cada carteira, o retorno excedente médio por unidade de desvio padrão é igual a uma constante  $\lambda_i$ . Nesse caso, as taxas de crescimento esperadas ajustadas ao risco  $v_i$  também são constantes:

$$v_i = \mu_i - \lambda_i \sigma_i, \text{ para } i = 1, 2. \quad (9)$$

Considerando que a taxa de juros livre de risco  $i$  satisfaz as desigualdades  $v_2 < i \leq 1 + v_2$ , então os terrenos construídos e vagos possuem um valor finito.

Ao longo do tempo o valor do imóvel construído responde à evolução estocástica de seus fluxos de caixa. Assim, condicionada ao fluxo de caixa corrente  $x_2$ , a propriedade construída possui o preço corrente  $P(x_2)$ . Já que o preço  $P(x_2)$  depende de  $x_2$ , uma carteira instantânea sem risco pode ser constituída a partir da propriedade construída e da segunda carteira de ativos substitutos,  $i = 2$ . Para impedir uma arbitragem sem risco, essa carteira instantânea deve retornar a taxa de juros livre de risco  $i$ . O preço  $P(x_2)$  deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{dP + qx_2}{P} = i \quad (10)$$

Aplicando-se o Lema de Ito à equação (10), resulta na equação diferencial (11):

$$\frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 P'' + \vartheta_2 x_2 P' - iP + qx_2 = 0 \quad (11)$$

Como a construção é irreversível, a equação diferencial (11) deve ser satisfeita para todos os fluxos de caixa:  $x_2 \geq 0$ .

O preço do imóvel também deve satisfazer duas condições-limites. Se a propriedade construída não possui fluxo de caixa,  $x_2 = 0$ , então, pelo processo geométrico de Wiener (8), ela não possui fluxos de caixa ao longo do tempo. Então, se  $x_2 = 0$ , a propriedade construída não possui valor:

$$P(0) = 0 \quad (12)$$

Se a propriedade possui um multiplicador da renda bem definido, então seu preço por unidade de fluxo de caixa,  $P(x_2)/x_2$  precisa ser limitado por uma constante  $0 < \xi < \infty$ :

$$P(x_2) \leq \xi x_2 \quad (13)$$

Ao longo do tempo o valor do terreno vago também é dado pela evolução randômica dos fluxos de caixa e custo de construção. Condicionado aos valores correntes  $x = (x_1, x_2)$ , o terreno vago possui valor  $V(x)$ . Dadas duas variáveis  $x$ , uma carteira sem risco instantânea pode ser construída pela combinação do terreno vago com duas carteiras de ativos substitutos,  $i = 1, 2$ . Novamente, os retornos das duas carteiras são perfeitamente correlacionados com os incrementos estocásticos em (8). Para impossibilitar a arbitragem sem risco, a carteira sem risco deve ter como retorno a taxa de juros livre de risco  $i$ . O valor do terreno vago  $V$  deve satisfazer a seguinte equação de avaliação:

$$\frac{dV + \beta x_2}{V} = i \quad (14)$$

Aplicando-se o Lema de Ito de duas variáveis à equação (14), resulta na equação diferencial:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 V_{11} + \sigma_{12} x_1 x_2 V_{12} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 V_{22} + v_1 x_1 V_1 + v_2 x_2 V_2 - iV + \beta x_2 = 0 \quad (15)$$

Nas equações (14) e (15),  $\beta x_2$  é o fluxo de caixa do terreno vago por unidade de tempo. A equação diferencial parcial resultante (15) deve satisfazer todos os valores de  $x$  cuja construção não seja ótima.

O valor do terreno vago também deve respeitar às condições-limites. A primeira delas é que, dada a especificação estocástica em (8), nem o custo de construção  $x_1$  nem o fluxo de caixa  $x_2$  podem ser negativos. Como resultado, os valores dos terrenos construídos devem satisfazer as desigualdades:  $0 \leq V(x) \leq P(x_2)$ . Além disso, se a propriedade construída não possuir fluxos de caixa,  $x_2 = 0$ , então ela não possui valor, como especificado em (12). Nesse caso, para o terreno vago:

$$V(x_1, 0) = 0 \quad (16)$$

Considerando as equações e condições anteriores, o investidor escolhe o ponto ótimo de tempo e densidade que maximizam o valor de mercado do terreno vago. Se o imóvel é construído no ponto  $x = x^*$  com a densidade  $q = q^*$ , o valor do terreno vago  $V(x^*)$  deve ser igual ao preço da propriedade construída  $P(x_2^*)$  menos o custo de construção  $q^{*\gamma} x_1^*$ :

$$V(x^*) = P(x_2^*) - q^{*\gamma} x_1^* \quad (17)$$

Dada a equação (17), a construção é ótima quando  $x = x^*$  em  $q = q^*$ , se e somente se:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x^*) = -q^* \text{ e } \frac{\partial V}{\partial x_2} = P'(x_2^*), \quad (18)$$

e

$$q^* \equiv \arg \max_q \{P(x_2^*) - q^\gamma x_1^*: 1 \leq q \leq \delta_{max}\} \quad (19)$$

A condição (18) é chamada de condição de alisamento (*tight-fit* ou *smooth-pasting condition*).

O problema proposto pelas equações anteriores é resolvido em dois passos. Primeiro, a função preço  $P$  para a propriedade construída é determinada. Depois, usando esse resultado, uma função de avaliação  $V$  para o terreno vago é derivada. Para a propriedade construída a solução é imediata. Sujeita às condições limites (12) e (13), a equação diferencial (11) possui a solução única:

$$P(x_2) = \pi q x_2 \quad (20)$$

com a constante  $\pi \equiv 1/(i - v_2)$ . Como indicado em (20), o preço do imóvel construído é linear em seu fluxo de caixa por unidade de tempo  $q x_2$ . O preço por unidade de fluxo de caixa, ou, de maneira equivalente, o multiplicador da renda  $\pi$ , está diminuindo na taxa de juros  $i$ , aumentando na taxa de crescimento esperada  $\mu_2$  do fluxo de caixa unitário  $x_2$  e reduzindo na variância  $\sigma_2^2$ .

A linearidade do preço da propriedade construída em relação à densidade de construção (20) impõe a restrição  $\gamma > 1$  na equação do custo total de construção  $q^\gamma x_1$ , que deverá interceptar o preço da propriedade por baixo, para que exista momento e densidade ótimos de construção. Como ressaltado por Titman (1985), a intuição para a função do custo ser crescente e convexa é que conforme o número de andares do prédio aumenta, o custo do trabalho por andar se eleva assim como os custos da fundação do prédio.

O valor do terreno vago pode ser calculado pela função  $V$ , que é linear e homogênea em  $x$ . Duas taxas são definidas: o fluxo de caixa relativo ao custo de construção,  $y \equiv x_2/x_1$ , e o valor do terreno vago em relação ao custo unitário de construção,  $W(y) \equiv V(x)/x_1$ . Também são definidos dois parâmetros:

$$\eta \equiv -\left(\frac{v_2 - v_1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{v_2 - v_1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{i - v_1}{\omega^2}\right)}, \quad \psi \equiv \frac{\eta}{\eta - 1} \quad (21)$$

$$\omega^2 \equiv \sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2 \quad (22)$$

Eles satisfazem as desigualdades:  $\eta, \psi > 1$ .

Essa solução inclui tanto o tempo quanto a densidade ótimos para a construção, que ocorre à taxa  $y^*$ :

$$y^* = \begin{cases} \frac{\psi}{\pi(1-\beta)} & \frac{\psi}{1-\beta} \leq \gamma \\ \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\beta\gamma}{\gamma-\psi}\right)^{\gamma-1} & \frac{\delta\psi}{\delta-\beta} \leq \gamma \leq \frac{\psi}{1-\beta} \\ \frac{\psi}{\pi} \frac{\delta^\gamma}{\delta-\beta} & \gamma < \frac{\delta\psi}{\delta-\beta} \end{cases} \quad (23)$$

A densidade ótima  $q^*$  é:

$$q^* = \begin{cases} 1 & \frac{\psi}{1-\beta} \leq \gamma \\ \frac{\beta\gamma}{\gamma-\psi} & \frac{\delta\psi}{\delta-\beta} \leq \gamma < \frac{\psi}{1-\beta} \\ \delta & \gamma < \frac{\delta\psi}{\delta-\beta} \end{cases} \quad (24)$$

As soluções aqui apresentadas (23) e (24) diferem daquelas obtidos por Williams (1991), uma vez que apresentam os ajustes observados por Jou e Tan Lee (2007).

O valor resultante da propriedade subutilizada pode ser escrito condicionado às taxas ótimas de tempo e densidade de construção. Medido por unidade do custo de construção, o valor do terreno vago é:

$$W(y) = \beta\pi y + \frac{q^*}{\eta - 1} \left(\frac{y}{y^*}\right)^\eta \quad (25)$$

para  $0 \leq y \leq y^*$ . A função do valor do terreno vago relativo ao seu custo de construção é convexa e crescente à taxa  $y \equiv x_2/x_1$ , e é tangente à taxa do ponto ótimo  $y^*$  pelo lucro da construção por unidade de custo de construção  $\pi q^* y - q^{*\gamma}$ . Como resultado, o multiplicador

da renda  $V/x_2 \equiv W/y$  é obtido Esta variável aumenta à taxa  $y$  do fluxo de caixa em relação ao custo de construção.

Dessa forma, um aumento na variância, tanto em  $\sigma_1^2$  quanto em  $\sigma_2^2$ , ou uma redução da correlação  $\rho$ , que não altere as taxas de crescimento ajustadas ao risco  $v_1$  e  $v_2$ , faz crescer o tempo ótimo de construção, a densidade ótima e o valor do terreno vago, quando  $v_1 \geq v_2$ . Sob as mesmas condições, um aumento na taxa de juros livre de risco  $i$  possui o efeito oposto, reduzindo o tempo ótimo de construção, a densidade ótima e o valor do terreno vago. Uma elevação no fluxo de caixa decorrente do terreno vago  $\beta x_2$ , induzido por um aumento do coeficiente  $\beta$ , torna maior tanto o tempo ótimo de construção quanto sua densidade ótima. Sempre que a densidade máxima limitar a construção, ou seja,  $q^* = \delta_{max}$ , o crescimento da densidade máxima permitida  $\delta_{max}$  reduz o tempo ótimo de construção, mas incrementa sua densidade ótima e o valor do terreno vago. Finalmente, se cresce o custo de escala  $\gamma$ , reduz sua densidade ótima, sempre que  $0 < q^* < \delta_{max}$ . Essas análises estão na tabela 3.

Dessas estatísticas comparativas, analisa-se primeiramente a densidade ótima. Sempre que o custo de construção ajustado ao risco exceder ou for igual ao fluxo de caixa correspondente, ou seja,  $v_1 \geq v_2$ , a densidade ótima é maior, com maior risco ou taxas de juros menores. O que pode ser entendido assim: a opção para construir é mais valiosa com uma densidade flexível, e não fixa. Dada uma densidade flexível, o proprietário otimamente adia a construção até obter um fluxo de caixa maior do que seus custos de construção. Isso incrementa tanto o tempo ótimo de construção quanto sua densidade ótima e, portanto, o valor relativo do terreno vago.

Em uma densidade ótima  $q^*$ , o fluxo de caixa da propriedade é  $q^*y$ , o valor resultante de mercado é  $\pi q^*y$  e o custo de construção,  $q^{*\gamma}$ , todos medidos em relação ao custo unitário de construção  $x_1$ . O terreno vago possui o fluxo de caixa  $\beta y$  e o valor de mercado resultante  $W(y)$ , também medido em relação a  $x_1$ . A taxa ótima  $y$  para construir é  $y^*$ .

**Tabela 3: Efeitos e Restrições no Modelo de Williams.**

| Aumento em  | $y^*$ | $q^*$ | $W(y)$ | Restrições   |
|---|-------|-------|--------|--|
| $\beta$ fluxo de caixa do terreno vago            | +     | +     |        |  |
| $\gamma$ elasticidade do custo                    |       | -     |        | $\frac{\delta\psi}{\delta - \beta\psi} \leq \gamma < \frac{\psi}{1 - \beta\psi}$ |
| $\delta$ densidade máxima por lei de zoneamento   | -     | +     | -      | $\gamma < \frac{\delta\psi}{\delta - \beta\psi}$                                 |
| $i$ taxa de juros                                 | -     | -     | +      | $v_1 \geq v_2$   |
| $\rho$ correlação preço-custo                     | -     | -     | +      | $v_1 \geq v_2$   |
| $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ variâncias preço e custo | +     | +     | +      | $v_1 \geq v_2$   |

Fonte: Medeiros (2003).

A tabela 3 mostra os efeitos e as restrições no modelo de Williams (1991). Os parâmetros são:  $\beta$  é o fluxo de caixa do terreno vago em relação à propriedade construída;  $\gamma$  é o custo de escala;  $\delta$  é a densidade máxima permitida;  $i$  é a taxa de juros livre de risco;  $v_i$  são as taxas esperadas ajustadas ao risco do custo unitário de construção e de fluxo de caixa;  $\sigma_i^2$  são suas respectivas variâncias e  $\rho$  o coeficiente de correlação entre as duas taxas de crescimento. O motivo das restrições para  $\gamma$  e  $\delta$  é que a densidade de construção (área construída dividida pela área do terreno) deve ser maior do que 1 e menor do que  $\delta$  (limite máximo de construção permitido pela lei de zoneamento).

Esses resultados valem somente se  $v_1 \geq v_2$ . Essa condição é plausível, pois em longos períodos, o custo de construção afeta a oferta agregada do espaço a ser vendido, que, por sua vez, determina em grande escala os preços de venda das unidades e, portanto, os fluxos de caixa. Assim, a longo prazo, os preços de venda dos imóveis são restringidos acima, mas não abaixo, pelos custos de construção. Logo, a taxa de crescimento esperada dos fluxos de caixa  $\mu_2$  é limitada acima pela de crescimento esperada dos custos de construção  $\mu_1$ , enquanto que a variância da taxa de crescimento dos fluxos de caixa  $\sigma_2^2$  é limitada abaixo pela variância análoga do custo de construção  $\sigma_1^2$ . Os motivos detalhados das restrições encontram-se na seção 8.2, em desenvolvimentos matemáticos.

De acordo com Titman (1985), a opção de construir é mais valiosa com uma densidade flexível, ao invés de fixa. Por isso, é importante considerar no modelo a determinação da densidade como uma variável endógena. A determinação da densidade afeta não somente o valor do terreno vago e da propriedade construída como também o momento ótimo de

construção. Portanto, fixar a densidade  $q$  abaixo ou acima do montante ótimo  $q^*$  pode subestimar ou sobre-estimar o verdadeiro valor do terreno vago.

Embora Williams (1991) e Medeiros (2003) considerem a opção de abandono, esse cenário não será considerado por não ser observável nos perímetros das Operações Urbanas estudadas em razão da alta demanda por terrenos.

É importante notar que, no trabalho de Williams (1991) e nos trabalhos que seguem seu modelo, por uma questão de simplificação computacional, derivou-se um  $q^*$  que busca a maximização do valor intrínseco e não do valor opção, que seria obtida, solucionando-se o problema de otimização:

$$q^* \equiv \arg \max_q \{V(X, P): 1 \leq q \leq \delta_{max}\} \quad (26)$$

### 3.4 O Modelo de Williams Modificado por Quigg

O modelo desenvolvido por Quigg, e ampliado no presente trabalho, tem como objetivo estudar o momento e densidade ótimos de construção através da aplicação do modelo de opções reais quando a informação sobre a evolução dos preços dos imóveis (propriedades construídas) é conhecida. Ele é de horizonte infinito, de tempo contínuo, e possui equações matemáticas similares às de Williams (1991), mas com interpretações substancialmente distintas.

Nesse modelo, assume-se que o preço do imóvel construído ( $P$ ) e o custo total de construção ( $X$ ), ambos dependentes da escala de construção ( $q$ ), são as variáveis de estado.

O proprietário do terreno possui uma opção perpétua de construir em uma área vaga, por um tamanho e tempo ótimos, e está sujeito às leis de zoneamento. O custo de construção é dado por:

$$X = f + q^\gamma x_1 \quad (27)$$

em que  $f$  representa os custos fixos,  $q$  é a área construída,  $\gamma$  é a elasticidade do custo, e  $x_1$  representa o custo da construção por metro quadrado. Admite-se que os custos de construção seguem um movimento geométrico browniano, a uma taxa constante de crescimento ajustada ao risco ( $\vartheta_x$ ) e a uma variância constante ( $\sigma_x^2$ ), tal que:

$$\frac{dX}{X} = \vartheta_x dt + \sigma_x dz_x \quad (28a)$$

É importante notar que  $X$  possui uma distribuição lognormal descrita por:

$$X(t) = X(t_0) e^{\left(\vartheta_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)dt + \sigma_x z_x(t)} \quad (28b)$$

e, portanto, é possível que assuma valores próximos de zero.

Segundo a definição proposta por Quigg para a equação do custo total de construção (27), este deveria ser maior ou igual ao custo fixo  $f > 0$  e, portanto, incoerente com (28a) e (28b). Para evitar que isso ocorra, podem-se adicionar as premissas de que o custo de construção inicial seja substancialmente maior do que o custo fixo ( $X(t_0) \gg f$ ), que a volatilidade do custo seja pequena em relação a sua taxa de crescimento ( $\vartheta_x \gg \sigma_x$ ) e que  $t$  (momento futuro de avaliação de  $X$ ) seja próximo de  $t_0$ , evitando-se que o custo de construção possa momentaneamente ser menor do que o custo fixo ( $X_t \geq f, \forall t - t_0$  suficientemente pequeno). Alternativamente, pode-se considerar, sem que se altere os resultados quanto ao momento e densidade ótimos de construção, que  $f = 0$ . No desenvolvimento deste trabalho, seção 3.5, optou-se por esta última abordagem.

Assume-se que o preço  $P$  do ativo subjacente, a propriedade construída, é observável.  $P$  é dado por:

$$P = q^\phi \varepsilon \quad (29)$$

onde  $q$  é a área construída,  $\phi$  é a elasticidade do preço e  $\varepsilon$  é uma função de outros atributos da propriedade construída.

Para Quigg (1993) existe uma relação de concavidade entre o preço e o tamanho do edifício ( $\phi < 1$ ). Argumenta-se que o valor do imóvel comercial pode ter uma curva de preços descendente ao se dobrar a área disponível, pois famílias não pagariam o dobro de aluguel pelo dobro do espaço, uma vez que já possuíssem suas necessidades satisfeitas.

$P$  segue um movimento geométrico a uma taxa constante de crescimento ajustada ao risco ( $\vartheta_p$ ) e a uma variância constante ( $\sigma_p^2$ ), tal que:

$$\frac{dP}{P} = \vartheta_p dt + \sigma_p dz_p \quad (30)$$

onde  $\rho$  é a correlação constante entre  $dz_x$  e  $dz_p$ .

As formulações de Williams (1991) e Quigg (1993) são, portanto, equivalentes. No trabalho de Williams (1991), assim como em Titman (1985) e Medeiros (2003), a função custo é crescente e convexa, implicando  $\gamma > 1$ . A intuição para a função custo ser convexa é que, conforme o número de andares do prédio sobe, o custo do trabalho por andar aumenta e as fundações devem ser mais resistentes. Essa suposição é importante no trabalho de Williams, na medida em que o preço do imóvel construído é linear em relação à densidade de construção e, portanto, a curva de custo marginal deve interceptar a curva de preço marginal por baixo, para que seja possível se obter a densidade ótima de construção. No modelo de Quigg o parâmetro de elasticidade de custo necessita apenas exceder o parâmetro da elasticidade do preço ( $\gamma > \phi$ ), permitindo assim retornos positivos ou negativos.

Na tabela 4 traça-se um paralelo entre as principais definições e suposições dos trabalhos de Williams (1991), Medeiros (2003) e Quigg (1993). Para Williams e Medeiros, a função do preço é uma função linear da densidade  $q$ , já para Quigg o preço é uma função exponencial em  $q$ . No que diz respeito à equação do custo, Williams e Medeiros não consideram os custos fixos, ao contrário de Quigg. Segundo Williams e Medeiros, a elasticidade do custo é maior do que 1,  $\gamma > 1$ , condição para que a função exponencial do custo de construção encontre a função crescente e linear do preço. Em Quigg, só pode existir uma densidade, tal que o valor do terreno no exercício  $V$  assumo um valor máximo, quando a segunda derivada parcial de  $V$  em relação a  $q$ , no ponto de cela, seja menor do que zero, o que implica  $\gamma > \phi$ . Para maiores detalhes, ver a equação 48, na próxima seção.

**Tabela 4: Comparações entre os Trabalhos de Williams, Medeiros e Quigg.**

|                       | Williams/Medeiros                | Quigg                    |
|-----------------------|----------------------------------|--------------------------|
| Equação do Custo      | $X = q^\gamma x_1$               | $X = f + q^\gamma x_1$   |
| Elasticidade do Custo | $\gamma > 1$ Crescente e Convexa | $\gamma > \phi$          |
| Função do Preço       | $P = \pi q x_2$                  | $P = q^\phi \varepsilon$ |
| Elasticidade do Preço | É Constante ( $\pi$ )            | $\phi < 1$               |

Fonte: elaboração própria.

Aplicando o modelo de Quigg, utiliza-se a taxa de juros livre de risco,  $i$ , constante no tempo e igual para credores e devedores. Os proprietários de terreno são tomadores de preços, dado um modelo de equilíbrio parcial, onde se assume que uma decisão individual de construir não impacta no preço de mercado. O investimento é irreversível, ou seja, uma vez que o investidor constrói a propriedade, esta não possui mais um valor ótimo no tempo.

O terreno vago e a propriedade construída geram fluxos de caixa proporcionais ao preço da propriedade construída. Define-se  $\beta P$  como o fluxo de caixa proveniente do valor do terreno, resultado, por exemplo, do aproveitamento do terreno como estacionamento, e define-se  $\tau P$  como o fluxo de caixa proveniente da propriedade construída, resultado, por exemplo, do aluguel do imóvel. Tem-se também que  $\tau > \beta > 0$ .

Conforme Trigeorgis (1996) o prêmio pelo risco de um ativo pode ser expresso por:

$$\text{Prêmio ao Risco} = \lambda \sigma = (\alpha + d) - i \quad (31)$$

onde  $\alpha$  e  $\sigma$  são respectivamente a taxa de crescimento real e a volatilidade do ativo,  $d$  é o dividendo,  $i$  é a taxa de juros livre de risco,  $\lambda$  é o retorno adicional por unidade de desvio-padrão. Reescrevendo (31) em termos da taxa de crescimento ajustada ao risco ( $\vartheta$ ) tem-se:

$$\vartheta = \alpha - \lambda \sigma = i - d < i \quad (32)$$

As taxas de crescimento ajustadas ao risco  $\vartheta_x$  e  $\vartheta_p$  em (28) e (30), respectivamente, são definidas segundo (32), considerando-se a taxa de juros livre de risco  $i$ , as taxas de crescimento real  $\alpha_x$  e  $\alpha_p$ , os dividendos  $d_x$  e  $d_p$ , representados por descontos constantes e proporcionais ao custo total de construção ( $X$ ) e fluxos de caixa constantes e proporcionais ao preço da propriedade construída ( $P$ ), e os prêmios ao risco  $\lambda_x \sigma_x$  e  $\lambda_p \sigma_p$ . No presente trabalho não existe desconto constante e proporcional ao custo total de construção, isto é, podemos

assumir que o dividendo  $d_x$  pode ser igualado a zero. O fluxo de caixa da propriedade construída, valor constante e proporcional ao custo da propriedade construída ( $\tau$ ) – aluguel do imóvel, por exemplo –, representa o dividendo  $d_p$ . Com essas considerações, resulta de (32) que:

$$\begin{cases} \vartheta_x = \alpha_x - \lambda_x \sigma_x \leq i, \text{ onde a igualdade é válida para } d_x = 0 \\ \vartheta_p = \alpha_p - \lambda_p \sigma_p = i - \tau < i \end{cases} \quad (33)$$

Por fim, assume-se que existe um equilíbrio na economia no qual os ativos negociáveis baseados no custo total de construção e no preço da propriedade construída (*contingent claims* em  $X$  e  $P$ ) podem ser univocamente precificados e que os preços são obtidos, tomando-se a esperança de retorno sob uma medida de probabilidade ajustada ao risco e descontada pela taxa de juros livre de risco. Essa premissa é equivalente ao argumento-padrão de *hedging*, utilizado nos trabalhos de Titman (1985), Brennan e Schwartz (1985), Rubinstein (1976) e Milne e Turnbull (1991), assim como no de Williams (1991) e Medeiros (2003). Neste argumento, não há possibilidade de arbitragem numa economia na qual  $X$  e  $P$  podem ser replicados por portfólios de ativos continuamente negociáveis sem custos de transação, desde que se trate de um mercado de capitais perfeitamente competitivo.

Condicionado aos valores correntes do custo total de construção ( $X$ ) e do preço da propriedade desenvolvida ( $P$ ), o terreno vago possui valor  $V(X,P)$ . Uma carteira sem risco, instantânea, pode ser construída pela combinação do terreno vago com duas carteiras de ativos substitutos de tal forma que seus retornos são perfeitamente correlacionados com os incrementos estocásticos em (28) e (30). Para impossibilitar a arbitragem sem risco, a carteira sem risco que replica o valor do terreno vago mais o fluxo de caixa adicional gerado por esse mesmo terreno (estacionamento) deve retornar a taxa de juros livre de risco  $i$ . O valor do terreno vago  $V$  deve, portanto, satisfazer a seguinte equação de avaliação:

$$dV + \beta P = iV \quad (34)$$

Aplicando-se o Lema de Ito de 2 variáveis à equação (34):

$$\frac{1}{2} \sigma_X^2 X^2 V_{XX} + \sigma_{XP} X P V_{XP} + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 V_{PP} + v_X X V_X + v_P P V_P - iV + \beta P = 0 \quad (35)$$

Fazendo-se a mudança de variável  $z = \frac{P}{X}$  e definido-se o valor do terreno por unidade de preço de construção  $W(z) = \frac{V(X,P)}{X}$ , resulta na equação diferencial:

$$A_0W(z) + A_1zW'(z) + z^2W''(z) = I_0 \quad (36a)$$

onde

$$\begin{cases} A_0 = 2 \cdot \frac{\vartheta_x - i}{\omega^2}, & A_1 = 2 \cdot \frac{\vartheta_P - \vartheta_X}{\omega^2}, & I_0 = -2 \cdot \frac{\beta z}{\omega^2} \\ \omega^2 = \sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_P + \sigma_P^2 \end{cases} \quad (36b)$$

Segundo Quigg a solução de (36a) é dada por:

$$\begin{cases} W(z) = Az^j + k \rightarrow V(X, P) = X(Az^j + k) \\ A = (z^* - 1 - k)z^{*-j} \\ z^* = \frac{j}{j-1}(1+k) \\ k = \frac{\beta z}{i - v_x} \end{cases} \quad (36c)$$

### 3.5. O Modelo Proposto

A seguir apresenta-se a resolução completa da equação (36a), que difere em forma e resultados da solução fornecida por Quigg. Neste trabalho considerou-se ambas as soluções da equação diferencial, tanto a homogênea quanto a particular, não sendo desprezado nenhum resultado.

A equação (36a) é uma equação diferencial de Cauchy-Euler não homogênea e sua solução tem a forma:

$$W(z) = W_h(z) + W_p(z) \quad (37)$$

$$W_h(z) = C_1z^{j_1} + C_2z^{j_2} \quad \text{Solução Homogênea}$$

$$W_p(z) = C_3z + C_4 \quad \text{Solução Particular}$$

Substituindo  $W_p(z)$  em (36), obtém-se:

$$\begin{cases} C_3 = \beta\pi, & \text{com } \pi = \frac{1}{i - \vartheta_p} \\ C_4 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Chega-se à solução homogênea  $W_h(z)$  a partir das raízes do polinômio característico, que neste caso assume a forma quadrática  $j^2 + A_1j + A_0 = 0$ , cujo resultado é dado por:

$$\begin{aligned}
 j_1 &= -\left(\frac{\vartheta_P - \vartheta_X}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\vartheta_P - \vartheta_X}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{i - \vartheta_X}{\omega^2}} \\
 j_2 &= -\left(\frac{\vartheta_P - \vartheta_X}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\vartheta_P - \vartheta_X}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{i - \vartheta_X}{\omega^2}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Por (33) tem-se que  $i - \vartheta_X \geq 0$ , o que implica  $j_2 \leq 0$ . Por outro lado, quando o preço da propriedade contruída é zero, resulta que o valor do terreno vago também deve ser zero e, então, temos que  $V(X,0) = 0$  e  $W(0) = 0$ . As condições  $W(0) = 0$  e  $j_2 \leq 0$  obrigam  $C_2 = 0$  na solução homogêna (37).

O investidor escolhe o ponto ótimo de tempo e densidade que maximizam o valor de mercado do terreno vago. Se o imóvel é construído no momento  $z = z^*$  com a densidade  $q = q^*$ , o valor de exercício (*intrinsic value*) do terreno vago  $V(X^*,P^*)$  deve ser igual ao preço da propriedade construída  $P^* = P(q^*)$  menos o custo de construção  $X^* = X(q^*)$ , logo:

$$\begin{cases}
 W(z^*) = \frac{V(X^*,P^*)}{X^*} = \frac{P^* - X^*}{X^*} = z^* - 1 & (\text{value - matching condition}) \\
 W'(z^*) = j_1 C_1 z^{*j_1-1} + j_2 C_2 z^{*j_2-1} = 1 & (\text{smooth - pasting}) \\
 W''(z^*) = 0
 \end{cases} \tag{40}$$

Substituindo-se  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $j_1$  e  $j_2$  em  $W(z)$  (37) e esta última em (40), resulta no sistema de equações em  $C_1$  e  $z^*$ :

$$\begin{cases}
 C_1 z^{*j_1} + \beta \pi z^* = z^* - 1 \\
 j_1 C_1 z^{*j_1-1} + \beta \pi = 1
 \end{cases} \tag{41}$$

Solucionando (41), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \left( \frac{1}{j_1 - 1} \right) z^{*-j_1} \end{array} \right. \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z^* = \left( \frac{j_1}{j_1 - 1} \right) \left( \frac{1}{1 - \beta\pi} \right) \end{array} \right. \quad (43)$$

E finalmente:

$$W(z) = \beta\pi z + \frac{1}{j_1 - 1} \left( \frac{z}{z^*} \right)^{j_1} \quad (44)$$

É importar ressaltar que o modelo apresentado por Quigg (1993) apresenta algumas diferenças com os resultados (43) e (44) desenvolvidos acima. Primeiramente Quigg define que a solução para (35) apresenta a forma  $W(z) = Az^j + k$  com  $k = \beta z / (i - v_x)$ . Para que a solução possa assumir essa forma é essencial garantir que  $i - v_x \geq 0$  e que, portanto, uma das raízes do polinômio característico de (36a) seja menor ou igual a zero.

Quigg (1993) considera  $k$  como uma função de  $v_p$  e não de  $v_x$ . Além disso, ao construir as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $W$  em relação a  $z$  nas condições de contorno definidas em (40), Quigg considera que  $k$  é uma constante e, portanto, obtém valores distintos dos obtidos neste trabalho para  $z^*$  e  $W(z)$ .

Quigg argumenta que no momento do exercício a incerteza é nula e que, portanto,  $\omega$  tende a zero. Aplicando-se as propriedades de limites, resulta que  $j \rightarrow \infty$  e  $z^* \rightarrow 1 + k$ . É importante observar neste trabalho que valor de  $z^*$  é expresso como uma função de  $z$  e, logo, não seria uma constante.

**Tabela 5: Comparações entre os Resultados de Quigg e os deste Trabalho.**

|                                    | Quigg (1993)  | Este Trabalho  |
|------------------------------------|---|--|
| Equação Diferencial em $V(X,P)$    | $\frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 V_{XX} + \sigma_{XP} X P V_{XP} + \frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 V_{PP} + v_X X V_X + v_P P V_P - iV + \beta P = 0$ |  |
| Equação Diferencial em $W(z)$      | $A_0 W(z) + A_1 z W'(z) + z^2 W''(z) = I_0$   |  |
| Polinômio Característico           | $A_0 + A_1 j + j^2 = 0$   |  |
| Sol. geral de $W(z)$               | $W(z) = Az^j + k$   | $W(z) = W_h(z) + W_p(z)$<br>$W_h(z) = C_1 z^{j_1} + C_2 z^{j_2}$<br>$W_p(z) = C_3 z + C_4$   |
| Raízes do polinômio característico | $J$   | $j_1 > 0, j_2 \leq 0$  |
| Constantes                         | $A = (z^* - 1 - k)z^{*-j}$<br>$k = \frac{\beta z}{i - \vartheta_x}$   | $C_1 = \left(\frac{1}{j_1 - 1}\right) z^{*-j_1}$<br>$C_3 = \beta\pi, \quad \text{com } \pi = \frac{1}{i - \vartheta_p}$<br>$C_2, C_4 = 0$            |
| Restrições                         | -   | $C_2 = 0 \text{ requer } j_2 \leq 0 \rightarrow i - v_x \geq 0$  |
| Momento do Exercício               | $z^* = \left(\frac{j}{j-1}\right)(1+k)$<br>$\omega \rightarrow 0: z^* \rightarrow (1+k)$  | $z^* = \left(\frac{j_1}{j_1-1}\right)\left(\frac{1}{1-\beta\pi}\right)$<br>$\omega \rightarrow 0: z^* \rightarrow \left(\frac{1}{1-\beta\pi}\right)$ |
| $W(z)$                             | $W(z) = k + (z^* - 1 - k)\left(\frac{z}{z^*}\right)^j$  | $W(z) = \frac{\beta z}{i - \vartheta_p} + \frac{1}{j_1 - 1}\left(\frac{z}{z^*}\right)^{j_1}$   |

Fonte: elaboração própria.

Na tabela 5 encontram-se as comparações entre o modelo de Quigg e os resultados deste trabalho. O polinômio característico da equação diferencial (35) apresenta duas raízes que devem ser consideradas na solução, enquanto Quigg considera apenas a solução positiva. Além disso, ele considera  $k$  uma constante, independente de  $z$ , levando a resultados incorretos para  $z^*$ ,  $W(z)$  e  $V(X,P)$  quando calcula a derivada parcial de  $W$  em relação a  $z$ , na aplicação das condições de contorno.

Quando  $z \geq z^*$  o proprietário do terreno construirá imediatamente e o preço da opção será igual ao preço de exercício  $V(X,P) = X.W(z^*) = P - X$ , enquanto que se  $z < z^*$  o proprietário do terreno deverá mantê-lo e o valor do terreno será dado por (43) com  $V(X,P) = X.W(z)$ , ou seja:

$$\begin{cases} V(X, P) = P - X, & z \geq z^* \\ V(X, P) = \frac{\beta P}{i - \vartheta_p} + \frac{X}{j_1 - 1} \left( \frac{P/X}{z^*} \right)^{j_1}, & z < z^* \end{cases} \quad (45)$$

O valor intrínseco da opção (valor de exercício) pode ser obtido, tomando-se limite de (44) quando a variância  $\omega$  tende a zero., não existe incerteza e pela regra de L'Hopital obtém-se  $\omega \rightarrow 0; j_1 \rightarrow \infty; z^* \rightarrow (1 - \beta\pi)^{-1}$ . O resultado para o valor intrínseco corresponde a:

$$\begin{cases} V^i(X, P) = P - X, & z \geq z^* \\ V^i(X, P) = \frac{\beta z}{i - \vartheta_p}, & z < z^* \end{cases} \quad (46)$$

O prêmio pela opção de esperar para construir é dado pela diferença entre o valor da opção em (45) e o valor intrínseco (46), conforme ressaltado nos Gráficos (1) e (2).

Assim como Quigg sugere, uma vez definido o momento de exercício, a escala ótima (ou o tamanho ótimo) da construção  $q_o$  seria dada pela maximização do valor de exercício do terreno não construído:

$$q_o = \arg \max_q \{V^l(X, P) = P(q) - X(q) = q^\phi \varepsilon - (f + q^\gamma x_1), \quad 0 < q \leq \delta_{max}\} \quad (47)$$

Tomando-se a derivada parcial de  $V^l(X, P)$  em relação a  $q$  e igualando-a a zero, obtém-se a escala ótima de construção  $q_o$  (no exercício):

$$q_o = \left( \frac{\phi \varepsilon}{\gamma x_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - \phi}} \quad (48)$$

Para que  $q_o$  seja um ponto de máximo, é importante que a segunda derivada parcial de  $V^l(X, P)$  em relação a  $q$  seja negativa, implicando a condição adicional de que a elasticidade de escala do custo seja maior do que a elasticidade do preço, isto é,  $\gamma > \phi$ . Nesse caso temos que a segunda derivada parcial de  $V^l$  em relação a  $q$  em  $q_o$  é negativa:  $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q=q_o} = \gamma q_o^{\gamma-2} x_1 (\phi - \gamma) < 0$ .

Considerando-se  $q_e$  o valor da densidade no exercício, quando  $z = z^*$ , tem-se:

$$z^* = \frac{q_e^\phi \varepsilon}{q_e^\gamma x_1} \rightarrow q_e = \left( \frac{\varepsilon}{z^* x_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-\phi}} \quad (49)$$

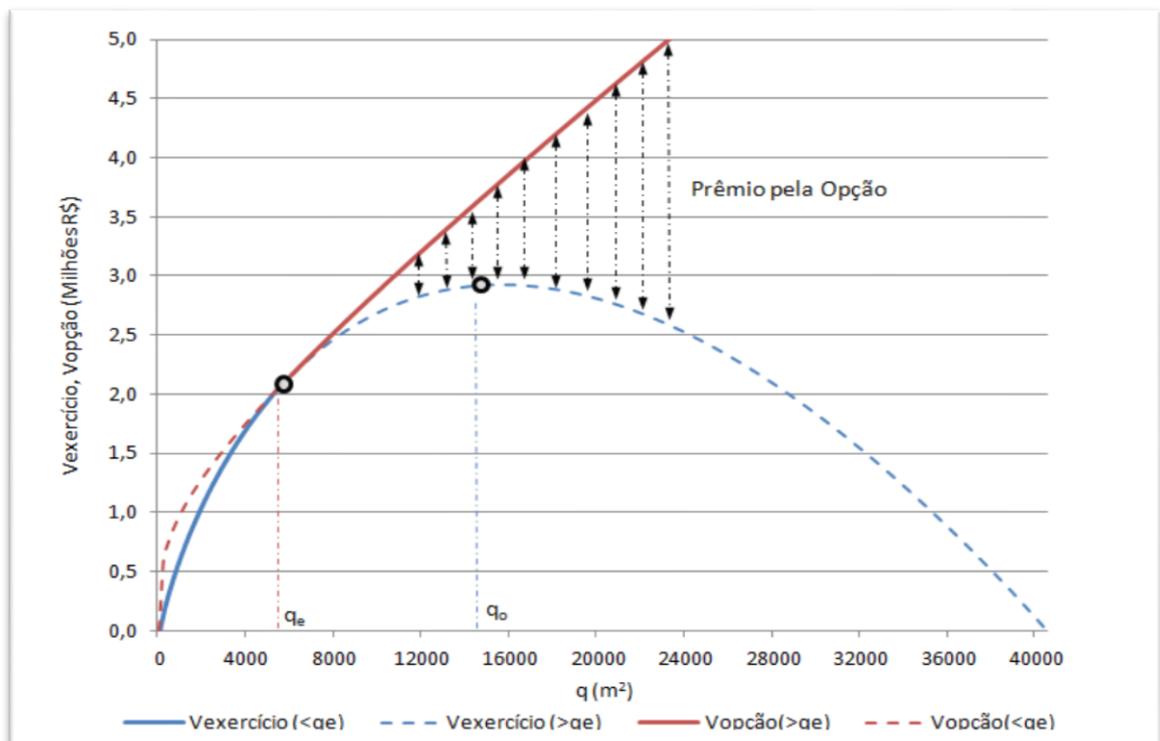
Uma vez que  $\gamma > \phi$ ,  $q$  e  $z$  são inversamente proporcionais. Portanto, o intervalo no qual  $z \geq z^*$  é equivalente a  $0 < q \leq q_e$ , enquanto que  $z < z^*$  é equivalente a  $q > q_e$ . Pode-se reescrever (45) em função da densidade de construção  $q$ :

$$\begin{cases} V(X, P) = q^\phi \varepsilon - q^\gamma x_1 & \text{para } 0 < q \leq q_e \\ V(X, P) = \frac{\beta q^\phi \varepsilon}{i - \vartheta_p} + \frac{q^{\gamma-j_1(\gamma-\phi)} x_1}{j-1} \left( \frac{\varepsilon}{x_1 z^*} \right)^{j_1(\gamma-\phi)} & \text{para } q > q_e \end{cases} \quad (50)$$

Na equação (50) o valor da densidade no exercício,  $q_e$ , é o ponto no qual a equação que representa o valor do terreno no exercício tangencia a equação que representa o valor da opção de espera por construção no futuro.

Existem dois casos a serem analisados no que concerne aos valores relativos de  $q_e$  e  $q_o$ :

- a.  $q_e \leq q_o$ , isto é, a densidade de exercício na qual o proprietário do terreno vago deve construir (equivalente a  $z > z^*$ ) é menor do que a densidade que maximiza o valor da propriedade construída.



**Gráfico 1: Valor da Opção x Valor de Exercício quando  $q_e \leq q_o$**

Fonte: elaboração própria.

Comparando-se as definições de  $q_0$  e  $q_e$ , respectivamente, nas equações (48) e (49), a condição  $q_e \leq q_0$  pode ser traduzida em termos das elasticidades de custo, preço e momento crítico de construção (*hurdle rate*) por  $\gamma \leq \phi \cdot z^*$ , dado que  $\gamma > \phi$ .

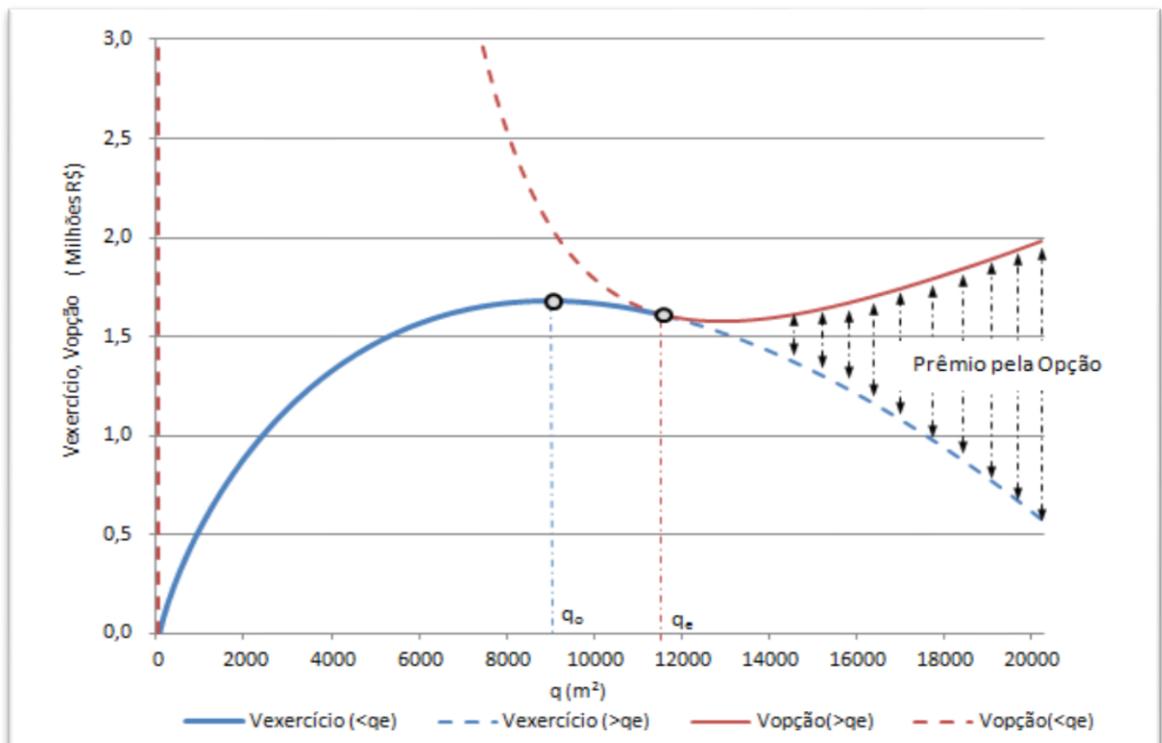
Nesse caso o valor ótimo da densidade de construção,  $q^*$ , levando-se em consideração suas restrições legais, é dado por:

$$\begin{cases} q^* = q_e = \left(\frac{\varepsilon}{z^* x_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-\phi}} & q_e < \delta_{max} \\ q^* = \delta_{max} & q_e \geq \delta_{max} \end{cases} \quad (51)$$

onde  $\delta_{max}$  é a densidade máxima de construção permitida pela lei de zoneamento.

- b.  $q_e > q_0$ , isto é, a densidade de exercício na qual o proprietário do terreno vago deve construir (equivalente a  $z > z^*$ ) é maior do que a densidade que maximiza o valor da propriedade construída.

Nesse caso a equação que representa o valor da opção por esperar tangencia a equação do valor da propriedade no exercício em sua descendente.



**Gráfico 2: Valor da Opção x Valor de Exercício quando  $q_e > q_0$**

Fonte: elaboração própria.

Analogamente ao caso anterior,  $q_e > q_o$  pode ser traduzida em termos das elasticidades de custo, preço e momento crítico de construção (*hurdle rate*) por  $\gamma > \phi \cdot z^*$ , dado que  $\gamma > \phi$ . De maneira que o valor ótimo da densidade de construção,  $q^*$ , levando-se em consideração as restrições legais de construção, é dado por:

$$\begin{cases} q^* = q_o = \left(\frac{\phi\varepsilon}{\gamma x_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-\phi}} & q_o < \delta_{max} \\ q^* = \delta_{max} & q_o \geq \delta_{max} \end{cases} \quad (52)$$

É importante notar que os resultado de (51) e (52) são aqueles que maximizam o valor da propriedade a ser construída à medida de  $z \geq z^*$  e não representam as densidades que maximizam o valor da opção.

A criação dos CEPACs, visando antecipar os recursos oriundos das contrapartidas provenientes da concessão de potencial adicional de construção nas áreas de operação urbana, amplia, ao mesmo tempo, a densidade máxima permitida e o custo total de construção.

O modelo apresentado por Quigg foi estendido neste trabalho, para levar em conta o impacto no valor da opção de construção, ao se utilizarem os CEPACs. Considerando-se  $\delta_{bas}$  a densidade básica limite definida pela lei de zoneamento,  $\delta_{max}$  a densidade máxima permitida, o uso dos CEPACs para a ampliação do potencial de construção e um custo fixo de construção nulo ( $f = 0$ ), temos que o custo total de construção é dado por:

$$X(q) = q^\gamma x_1 + \theta \cdot M_p^2 \cdot PCepac \quad (53)$$

onde PCEPAC é o preço do CEPAC,  $\theta$  é a taxa de conversão de CEPACs em metros quadrados adicionais,  $\gamma$  representa a elasticidade de escala do custo de construção,  $x_1$  é o custo de construção por metro quadrado, AT é a área do terreno,  $q$  é a área construída e  $M_p^2$  é o metro quadrado de área adicional de construção calculado por:

$$M_p^2 = \begin{cases} q - \delta_{bas} & q > \delta_{bas} \\ 0 & q \leq \delta_{bas} \end{cases} \quad (54)$$

onde  $q \leq \delta_{max}$ .

O mercado secundário dos CEPACs, ainda que existente na BOVESPA, é muito incipiente, de tal forma que iremos considerar o preço dos CEPACs como uma variável determinística.

Essa premissa foi utilizada ao longo das seções subsequentes e é coerente com os dados de mercado observados.

Uma vez que  $z$  atinge o momento ótimo de construção,  $z^*$ , a densidade ótima é aquela que maximiza o valor do terreno não desenvolvido, isto é,  $q_o$  é obtido, igualando-se a zero derivada parcial de  $VI(X,P)$  em relação a  $q$ :

$$\begin{cases} \varrho q_o^{\varrho-1} \varepsilon - \gamma q_o^{\gamma-1} x_1 - \theta.PCepac = 0 & \text{para } q_o > \delta_{bas} \\ \varrho q_o^{\varrho-1} \varepsilon - \gamma q_o^{\gamma-1} x_1 = 0 & \text{para } q_o \leq \delta_{bas} \end{cases} \quad (55)$$

Resultam três casos possíveis:

a.  $q_o \leq \delta_{bas}$

Não existe incremento de potencial de construção pela utilização de CEPACs e a densidade ótima de construção resume-se ao resultado já conhecido e desenvolvido por Quigg (1993):

$$q_o = \left( \frac{\gamma x_1}{\varrho \varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varrho-\gamma}} \quad (56)$$

b.  $\delta_{bas} < q_o \leq \delta_{max}$

A expressão para  $q_o$  não apresenta uma forma fechada, sendo possível apenas a resolução através de cálculo numérico:

$$\varrho q_o^{\varrho-1} \varepsilon - \gamma q_o^{\gamma-1} x_1 - \theta.PCepac = 0 \quad (57)$$

c.  $q_o \geq \delta_{max}$

A lei de zoneamento limita a construção de tal forma que:

$$q_o = \delta_{max} \quad (58)$$

Esse modelo analisa a influência do CEPAC na densidade ótima de construção e na razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção, uma vez que, ao se utilizar esse instrumento para aumentar seu potencial, amplia-se também seu custo total.

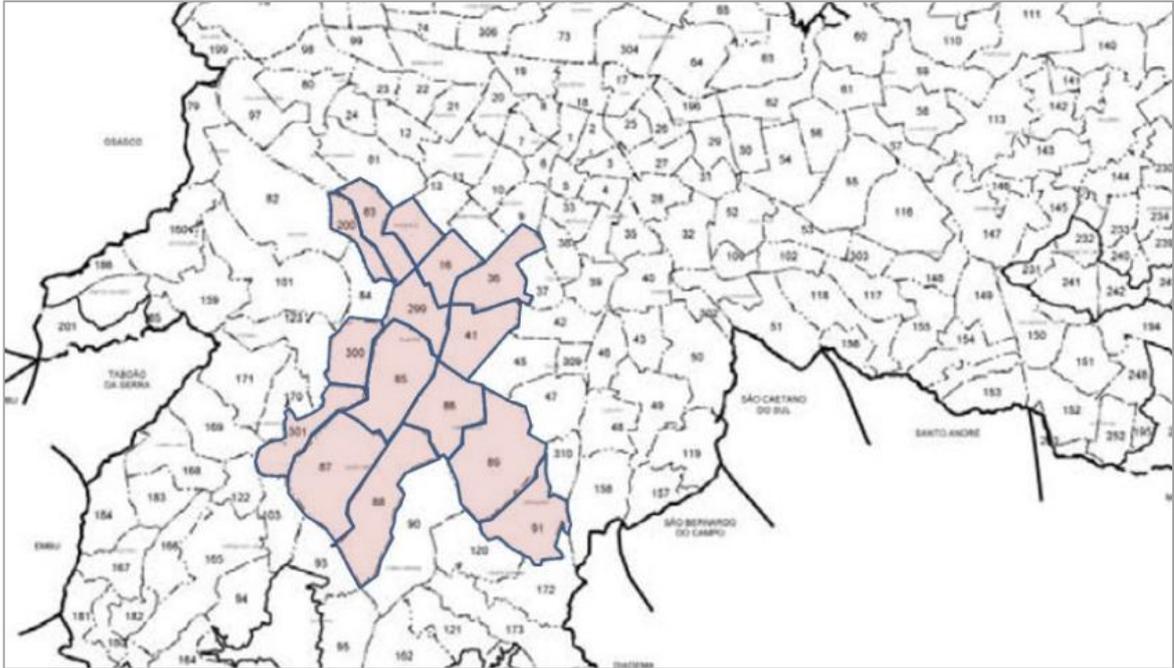
## 4. METODOLOGIA

### 4.1. Dados e Indicadores

A base de dados da Embraesp é composta por uma amostra de lançamentos comerciais e residenciais, obtidos segundo metodologia própria de pesquisa, e contém um rico volume de informações sobre os imóveis amostrados, como a localização, a área útil, a área total construída, a área do terreno, a data do lançamento, as características do imóvel e o respectivo preço. Os dados correspondentes aos lançamentos imobiliários de 3.207 amostras do período entre 2005 e 2010 foram cedidos pela Embraesp. Considerou-se esse período, pois o primeiro leilão de CEPACs ocorreu em dezembro de 2004.

A Prefeitura de São Paulo disponibiliza em seu site informações relacionadas à cobrança dos impostos IPTU e ITBI, juntamente com características sobre os imóveis do município. Criou-se um banco de dados através da extração dessas informações. Foram construídos *scripts* na ferramenta AutoIt capazes de extrair, processar e lançar os dados em uma planilha Excel. Eles foram coletados durante quatro meses por cinco computadores trabalhando de forma paralela, com a limitação de que o site só funcionava em horário comercial.

Esse banco de dados incluía primeiramente 259.021 unidades imobiliárias (comerciais, casas e apartamentos), limitados de acordo com o setor fiscal do município, seguindo o padrão de SQL (setor-quadra-lote) que identifica as unidades tributárias na Prefeitura. Os dados foram coletados para os seguintes setores fiscais: 015, 016, 038, 041, 083, 084, 085, 086, 087, 089, 091, 200, 299, 300 e 301. A figura 4 mostra o mapa dos setores fiscais pertencentes às Operações Urbanas.



**Figura 4: Mapa dos SQL (Setor, Quadra, Lote) Pertencentes às Operações Urbanas.**

Fonte: elaboração própria.

Por meio dos dados fornecidos pela Embraesp foi desenvolvida uma regressão dos preços dos imóveis com base em suas características. Esse modelo foi, então, utilizado para se determinarem os preços estimados por regressão dos imóveis do banco de dados construído a partir dos dados do site da Prefeitura de São Paulo. A figura 5 mostra a plotagem dos imóveis lançados nas regiões das Operações Urbanas, a partir dos dados da Prefeitura.

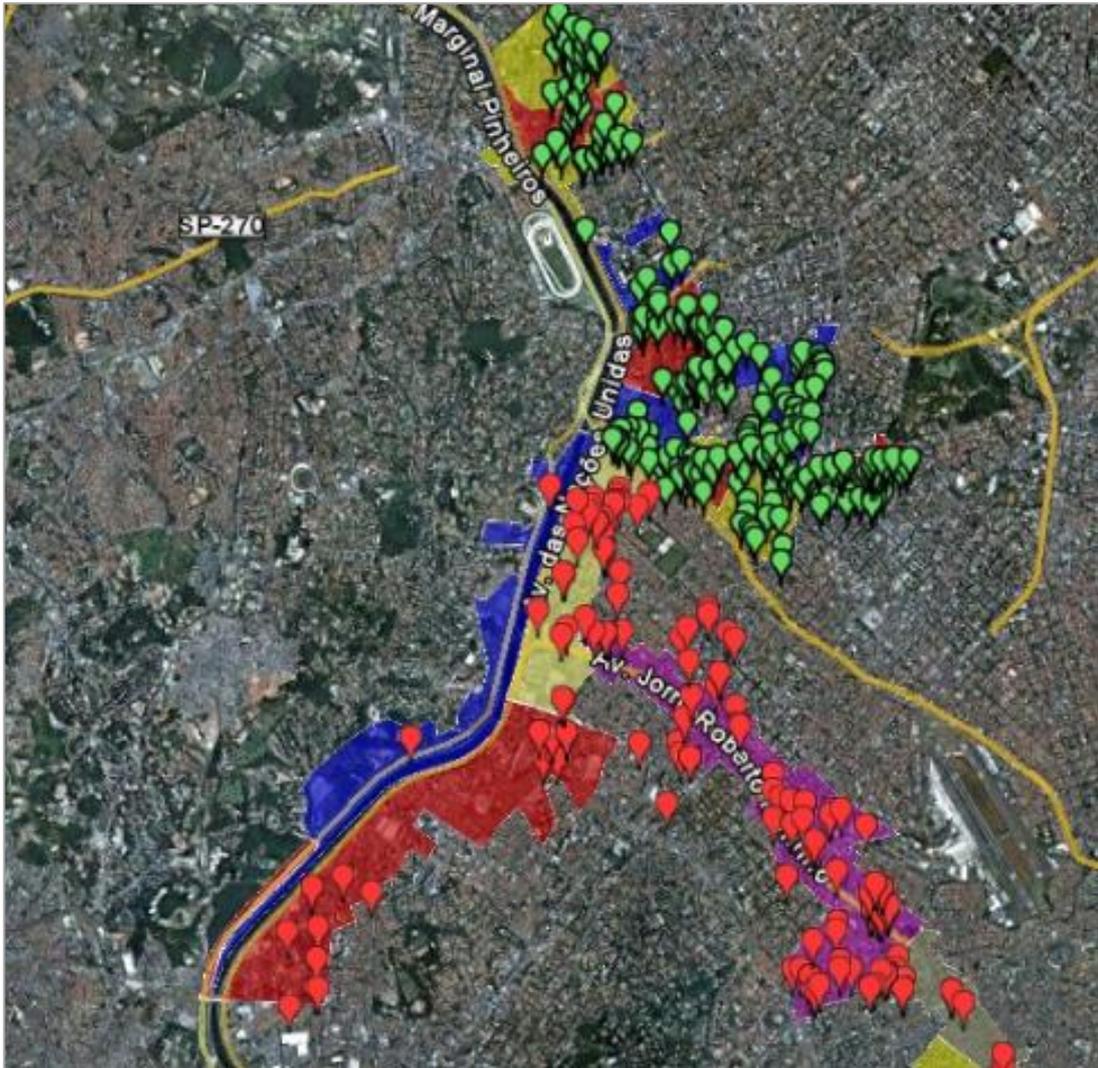
As informações do site ZAP, portal de classificados relacionados aos jornais Estadão e O Globo, foram coletadas da internet e digitadas em uma planilha, contendo preços de imóveis comerciais, casas e apartamentos entre 2008 a 2011 (desprezaram-se os *flats* e as áreas industriais, por falta de dados). Elas foram utilizadas para o cálculo da taxa de crescimento composto dos preços das regiões das Operações Urbanas, bem como para o cálculo de suas volatilidades em razão do grande volume de amostras disponíveis. No ZAP, o número médio de amostras mensais foi de 18.409 apartamentos, 2.755 casas e 909 imóveis comerciais. Apesar do tamanho expressivo da amostra, não foi possível utilizá-la como um substituto para os dados levantados através do site da Prefeitura de São Paulo e da Embraesp, porque não constam na base de dados as informações sobre as áreas dos terrenos dos edifícios, fundamentais para os cálculos de densidade de construção. Na tabela 6 encontra-se o número de amostras do ZAP por localidades e tipos de imóveis.

**Tabela 6: Número de Amostras do ZAP por Localidades e Tipos de Imóveis.**

| <b>Localidades</b>      | <b>APARTAMENTO</b> | <b>CASA</b>  | <b>COMERCIAL</b> | <b>TOTAL</b>  |
|-------------------------|--------------------|--------------|------------------|---------------|
| <b>Águas Espraiadas</b> |                    |              |                  |               |
| Berrini                 | 6                  |              | 12               | 18            |
| Brooklin                | 2.226              | 686          | 110              | 3.023         |
| Campo Belo              | 3.930              | 472          | 53               | 4.455         |
| Granja Julieta          | 408                | 129          | 3                | 540           |
| Jabaquara               | 288                | 121          | 18               | 428           |
| <b>Faria Lima</b>       |                    |              |                  |               |
| Cid. Jardim             | 114                | 551          | 8                | 673           |
| Itaim                   | 2.089              | 54           | 111              | 2.254         |
| Jd. Europa              | 325                | 113          | 13               | 452           |
| Moema                   | 5.951              | 186          | 169              | 6.305         |
| Pinheiros               | 2.150              | 346          | 217              | 2.713         |
| Vila Olímpia            | 919                | 98           | 195              | 1.212         |
| <b>TOTAL</b>            | <b>18.409</b>      | <b>2.755</b> | <b>909</b>       | <b>22.073</b> |

Fonte: elaboração própria.

Em relação à qualidade dos dados, a FIPE (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas) escolheu o ZAP como base para o índice FipeZap, um indicador que mostra a evolução dos preços dos imóveis anunciados em seis cidades, a partir de 2008. O índice é divulgado mensalmente, sendo composto pela variação de preços de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Fortaleza, Recife, Salvador e Distrito Federal. O ZAP possui a maior base de dados de imóveis anunciados do Brasil, com uma média de 190.000 unidades por mês, tornando possível fazer um histórico da evolução dos preços.

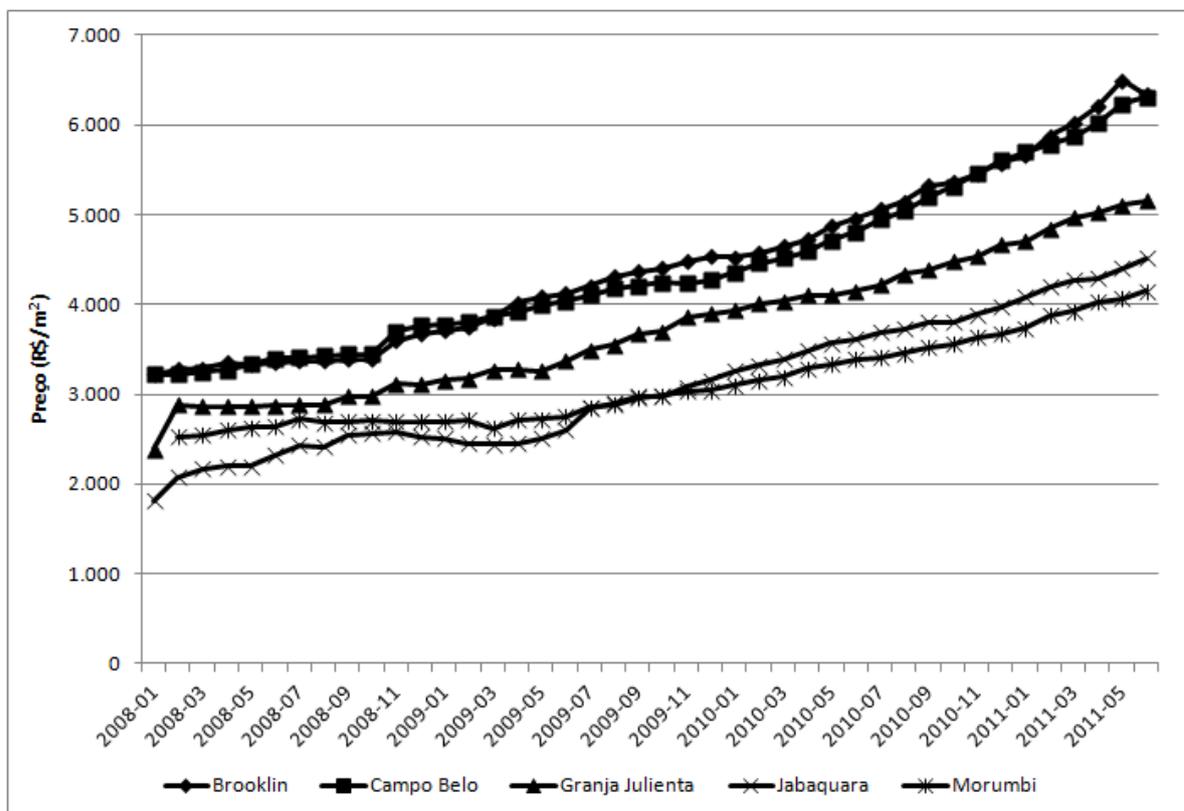


**Figura 5: Plotagem de 351 Imóveis Lançados nas Operação Águas Espriadas (em vermelho), 341 Lançamentos da Faria Lima (em verde) e Sobreposição de Mapas.**  
Fonte: elaboração própria.

## 4.2 Parâmetros de Preço de Venda dos Imóveis

Pelas hipóteses do modelo, admite-se que tanto o fluxo de caixa como os custos de construção seguem um movimento browniano geométrico. Uma série de valores mensais médios de venda de imóveis residenciais (casas e apartamentos) e comerciais foi utilizada, considerando o tipo de apartamento (quantidade de quartos) e bairro. Para cada bairro e tipo de apartamento há uma série mensal com início em janeiro de 2008 e término em julho de 2011. Esses dados foram obtidos através de anúncios classificados no ZAP, empresa do jornal O Estado de São Paulo e do jornal O Globo, responsável por anunciar os classificados na internet.

Os preços utilizados são os de oferta e os dados não significam negócios realmente realizados, pois, para algumas delas, pode não ter existido um comprador. Entretanto, considerando-se a racionalidade dos agentes econômicos, espera-se que os preços de oferta muito acima ou abaixo da média sejam reajustados, uma vez que os vendedores desejam concretizar seus negócios.

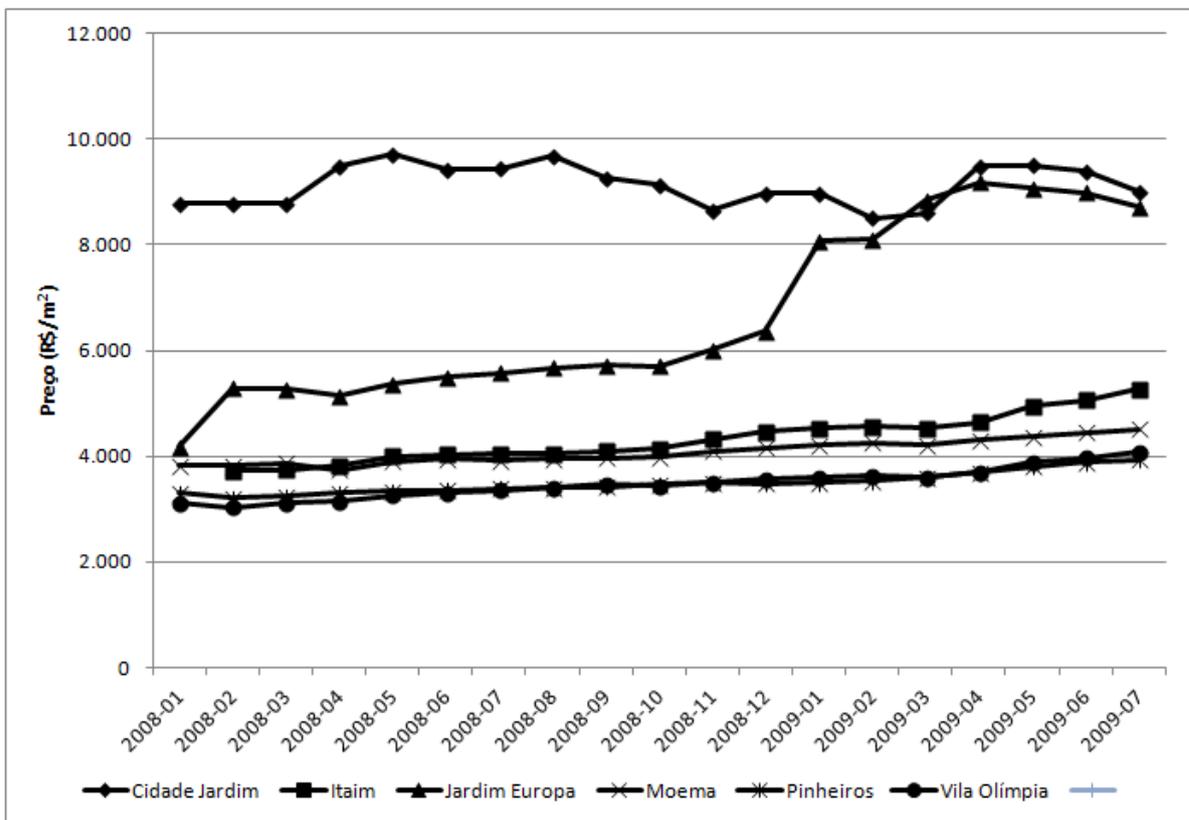


**Gráfico 3: Evolução dos Preços por Metro Quadrado dos Apartamentos para a Região da Operação Urbana Água Espreiada.**

Fonte: elaboração própria.

As séries de preços utilizadas foram separadas por tipo de imóvel (apartamento, casa ou comércio), número de dormitórios e bairro. Embora em alguns meses (especialmente em

setembro e outubro) se tenha constatado um maior número de lançamentos de imóveis (segundo os anúncios de jornal e os dados de lançamentos da Embraesp), não houve variações nos preços de transações acima do normal em relação ao mês anterior. Portanto, em relação às observações aberrantes (*outliers*), não foram observados preços mensais acima de 50% precedidos por grandes variações de preços.

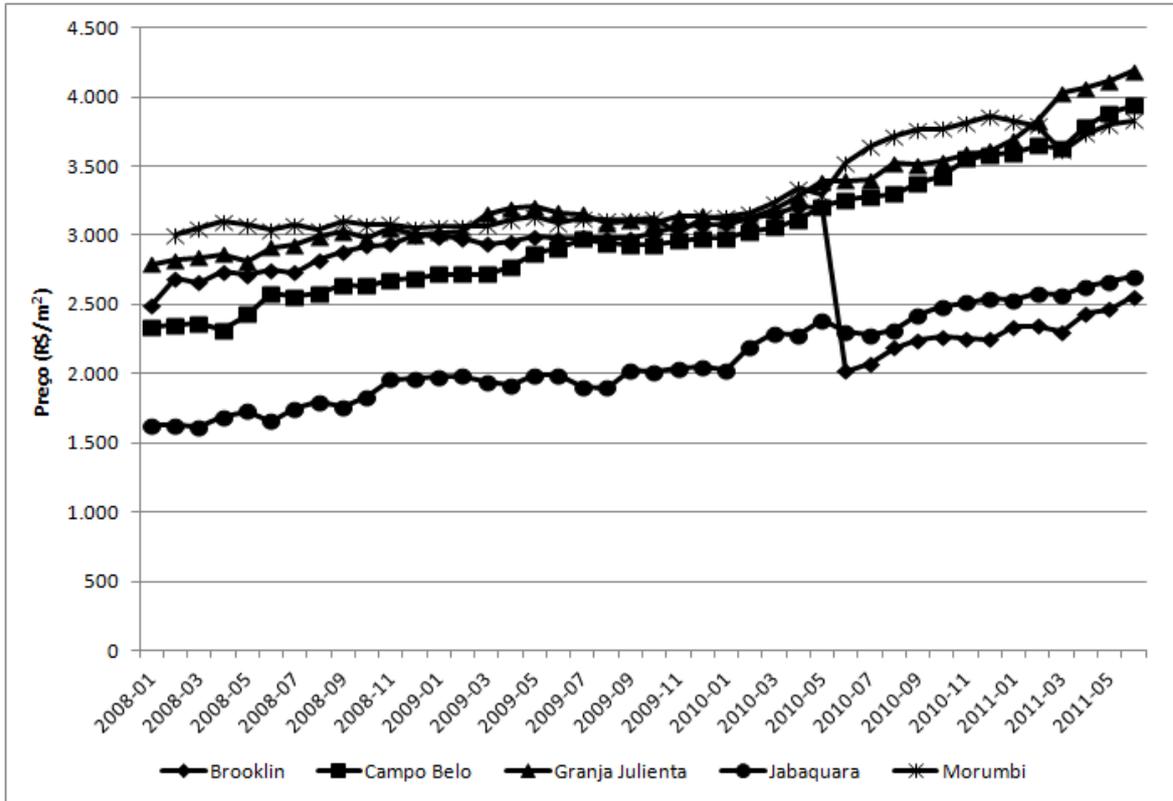


**Gráfico 4: Evolução dos Preços por Metro Quadrado dos Apartamentos para a Região da Operação Urbana Faria Lima.**

Fonte: elaboração própria.

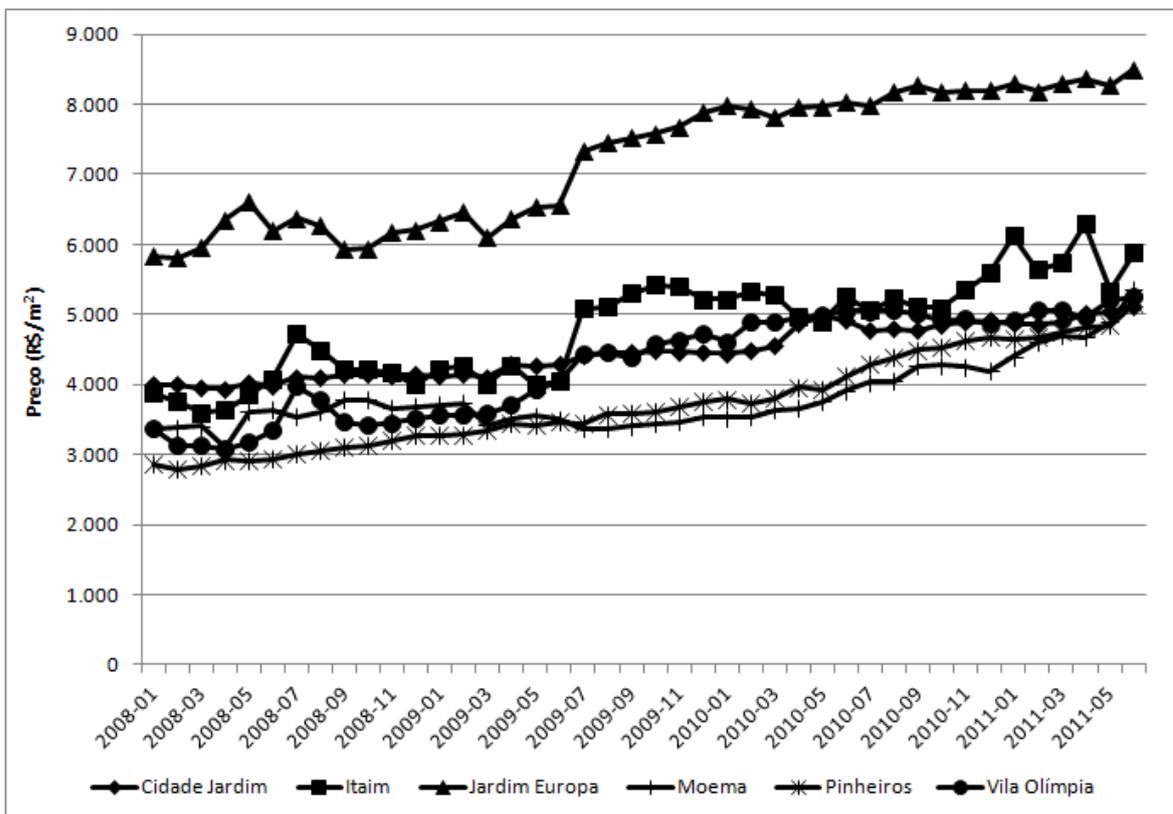
Na região da Operação Urbana Água Espreada (gráfico 3), observa-se uma evolução constante dos preços em todos os bairros, com destaque para as regiões de Campo Belo e Brooklin.

Já na região da Operação Urbana Faria Lima (gráfico 4) verifica-se um crescimento do preço dos apartamentos por metro quadrado, com maior evolução para os imóveis do Jardim Europa, devido à escassez desse tipo de construção, dado que esse bairro é residencial horizontal. O crescimento dos preços é menos acentuado, quando comparado ao crescimento do preço dos imóveis na região da Operação Água Espreada.



**Gráfico 5: Evolução do Preço por Metro Quadrado de Casas na Região da Operação Urbana Água Espreada.**

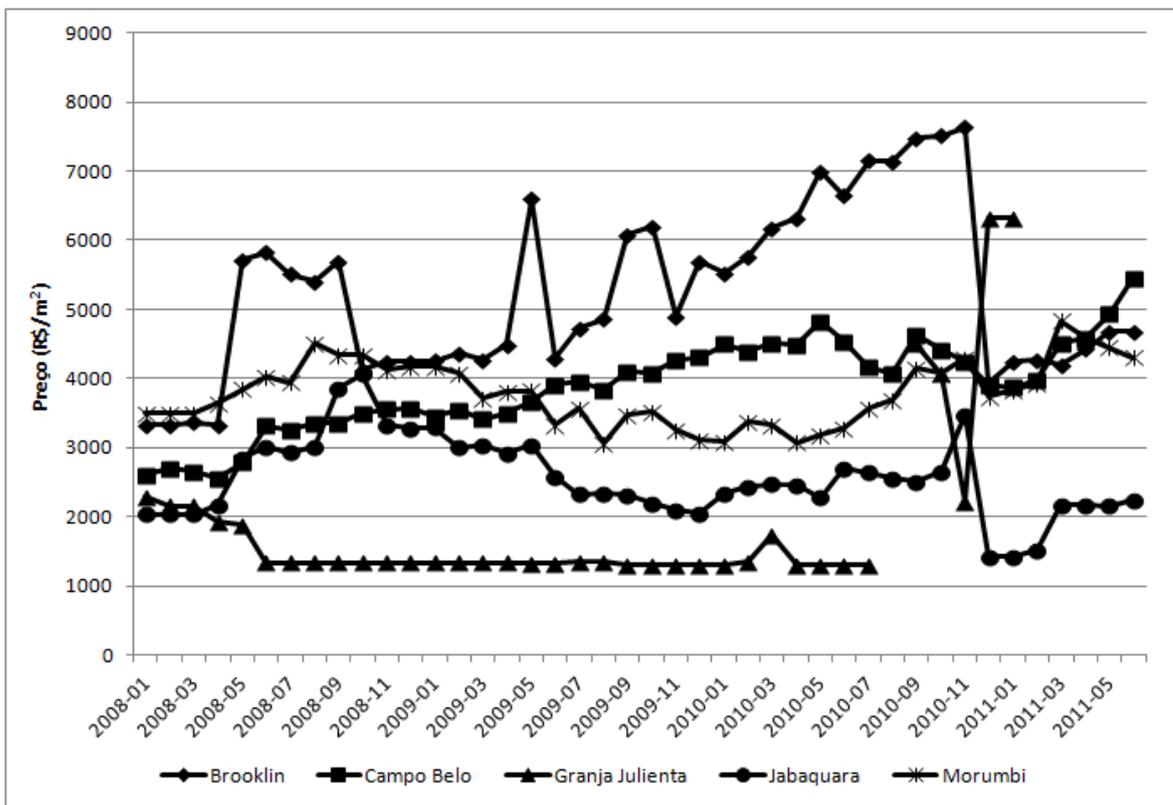
Fonte: elaboração própria.



**Gráfico 6: Evolução do Preço por Metro Quadrado de Casas na Região da Operação Urbana Faria Lima.**

Fonte: elaboração própria.

Para regiões tanto da Operação Faria Lima quanto da Água Espreiada, houve aumento do preço por metro quadrado de casas, com destaque para o bairro Jardim Europa, onde o preço por metro quadrado atingiu R\$8.341,00. Entretanto, a alta dos preços de apartamentos ao longo do tempo foi mais expressiva do que a dos preços de casas, como se pode notar nos gráficos 5 e 6.



**Gráfico 7: Evolução do Preço dos Imóveis Comerciais na Região da Operação Urbana Água Espreiada.**  
Fonte: elaboração própria.

No que diz respeito a imóveis comerciais, apesar de uma queda de preços no início de 2010, há uma tendência de aumento dos preços nos bairros do Brooklin e Campo Belo. Nota-se no gráfico 7 uma diminuição nos preços de imóveis comerciais do Jabaquara e uma tendência de estabilidade para os imóveis da Granja Julieta. Presume-se que a desvalorização dos imóveis comerciais do Jabaquara seja consequência das desapropriações para as obras do metrô. O projeto é polêmico entre os proprietários, que temem uma desvalorização, devido à resistência ao modelo de monotrilho elevado.

Na região da Operação Urbana Faria Lima, nota-se uma tendência de aumento de preços para todos os bairros, como observado no gráfico 8, entretanto, menos acentuada do que a tendência de crescimento para a região da Água Espreiada. Com a modernização da Marginal Pinheiros e a previsão da construção de uma linha de metrô, essa área deve ser amplamente

beneficiada, devendo se transformar em um corredor empresarial, das imediações da Avenida Luiz Carlos Berrini até a área de Alto de Pinheiros. A parte empresarial do bairro deve ser uma consequência do crescimento comercial da Avenida Faria Lima, que já está saturada, seguindo até a Marginal Pinheiros.

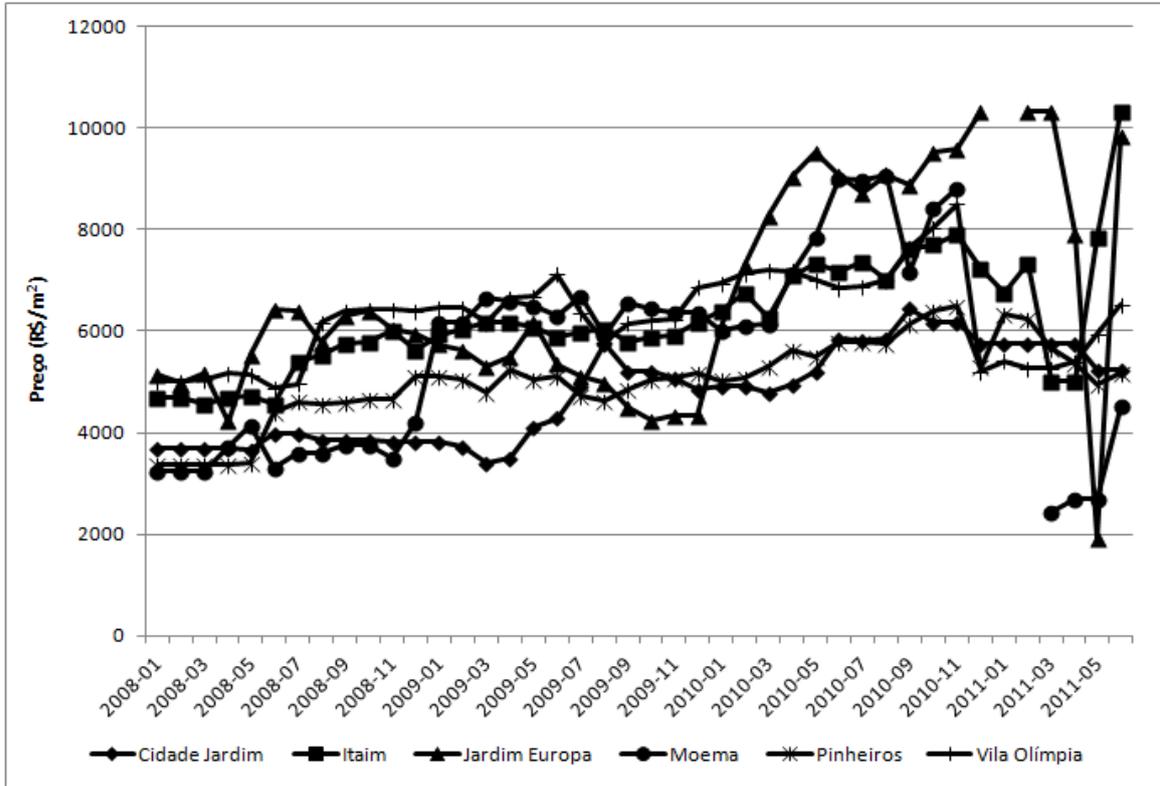


Gráfico 8: Evolução do Preço dos Imóveis Comerciais na Região da Operação Urbana Faria Lima. Fonte: elaboração própria.

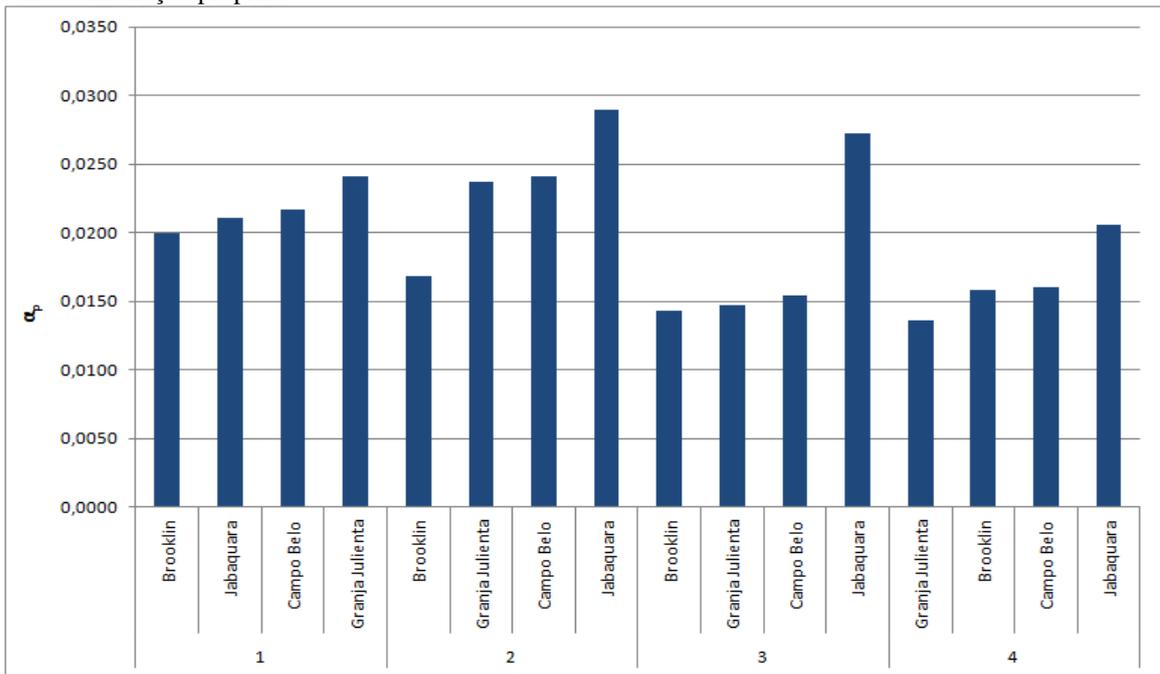
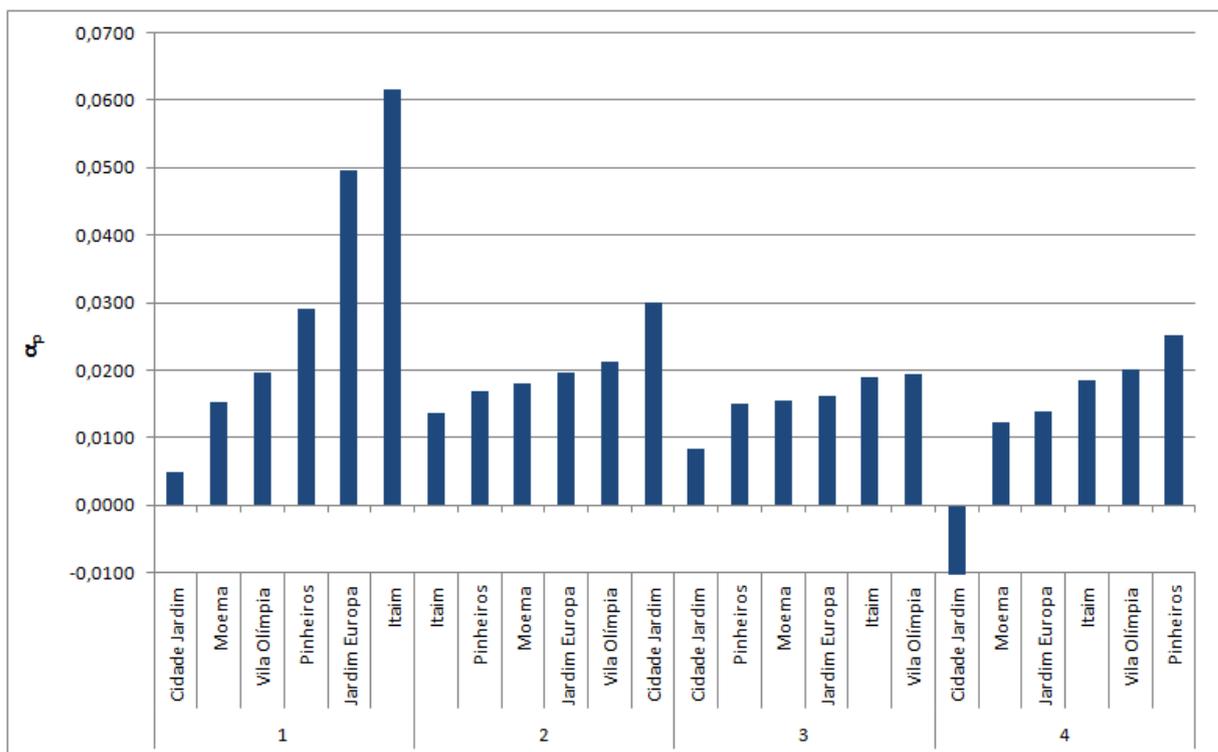


Gráfico 9: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Apartamentos por Número de Dormitórios, Operação Urbana Água Espraiada. Fonte: elaboração própria.

O gráfico 9 mostra a taxa de crescimento composto do preço, representada pelo parâmetro  $\alpha_p$ , podendo ser interpretada como a valorização dos imóveis em uma determinada região. Sua fórmula de cálculo e as simulações de Monte Carlo encontram-se no anexo 8.1. Considerou-se o preço por metro quadrado dos imóveis mês a mês.

No gráfico 7 nota-se uma maior valorização dos apartamentos de um e dois dormitórios em relação aos de três e quatro. Verifica-se também que, no conjunto de bairros da Operação Água Espreada, os apartamentos de um e dois dormitórios da Granja Julieta tiveram maior aumento. A alta mais significativa para residências de quatro quartos foi obtida por Brooklin e Campo Belo. Explicam-se essas diferenças pela tendência das Leis de Zoneamento e do Plano Diretor de permitir a coexistência entre a habitação e os usos não residenciais (para evitar o trânsito em grandes distâncias), bem como o incremento dos coeficientes de edificação ao longo do tempo, que possibilitam uma maior densidade demográfica.

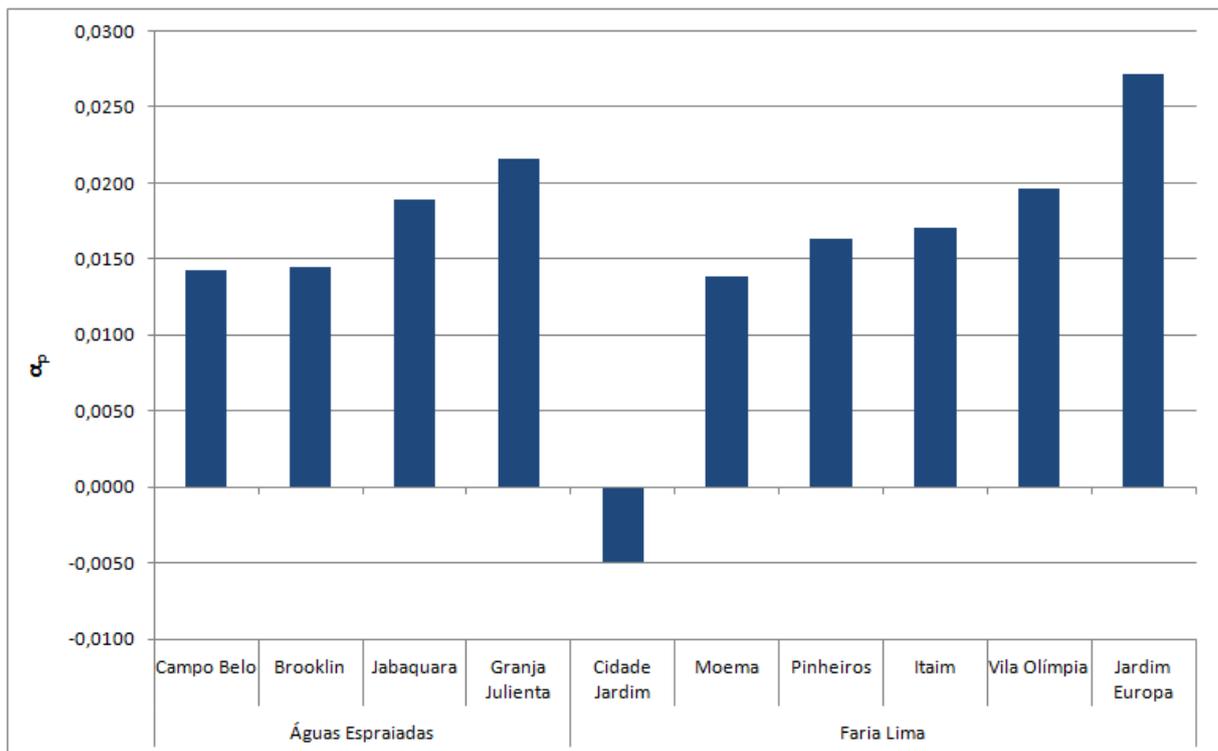


**Gráfico 10: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Apartamentos por Número de Dormitórios, Operação Urbana Faria Lima.**

Fonte: elaboração própria.

Observando-se no gráfico 10 a taxa de crescimento composto do preço (ou a taxa de crescimento médio da série de preços) para a Operação Faria Lima, destaca-se a Vila Olímpia, para qualquer número de dormitórios. Também valorizados estão os apartamentos dos bairros de Moema, Pinheiros e Itaim-Bibi. O único com pouca valorização em apartamentos foi a Cidade Jardim. Segundo a Lei de Zoneamento, essa é uma zona de uso estritamente

residencial de densidade demográfica baixa, sendo composta de edificações unifamiliares de até três pavimentos (taxa de ocupação de 50%, densidade 1), de alto padrão. Por ter maior número de casas (bairro residencial horizontal) e moradores de alto poder aquisitivo, há restrições quanto à construção de apartamentos na região. O gráfico 11 mostra a taxa de crescimento composto do preço para todos os apartamentos.



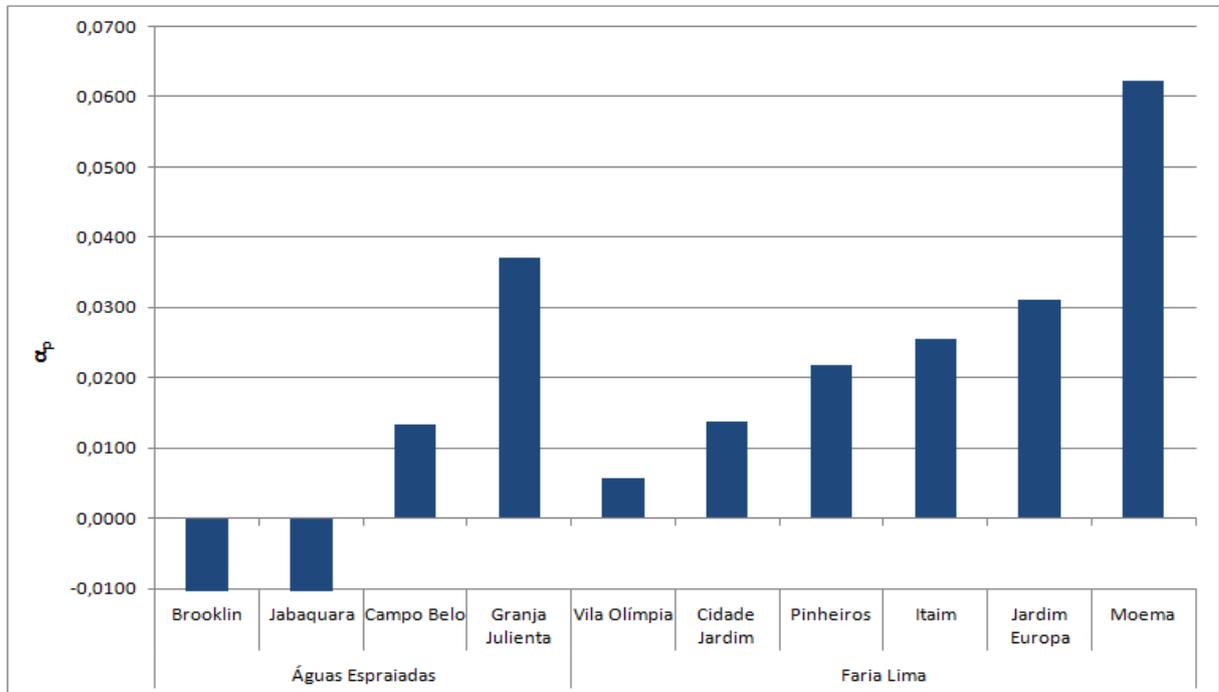
**Gráfico 11: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Todos os Apartamentos.**

Fonte: elaboração própria.

Em relação aos imóveis comerciais, verifica-se no gráfico 12 uma maior desvalorização no Jabaquara. Trata-se de um bairro relativamente novo, com edificações de menor padrão, de classe média, que desfruta agora de sua privilegiada localização ao sul da cidade. Apesar do desenvolvimento comercial (tais como a presença do Centro Comercial do Aço e de alguns bancos), ele ainda conserva as características de um bairro residencial. A construção do Aeroporto de Congonhas (1936) impulsionou seu crescimento, bem como a criação de uma linha de metrô (Estação Conceição em 1974). Entretanto, houve um aumento da violência, devido ao fácil acesso às marginais, dificultando a ação policial imediata, o que também influencia na inibição da construção de escritórios.

Ainda no gráfico 12, no grupo da Operação Água Espraiada, Granja Julieta e Campo Belo possuem os imóveis comerciais mais valorizados, enquanto o Brooklin é mais residencial. Já no grupo da Operação Faria Lima, há um aumento do preço por metro quadrado para o Itaim-

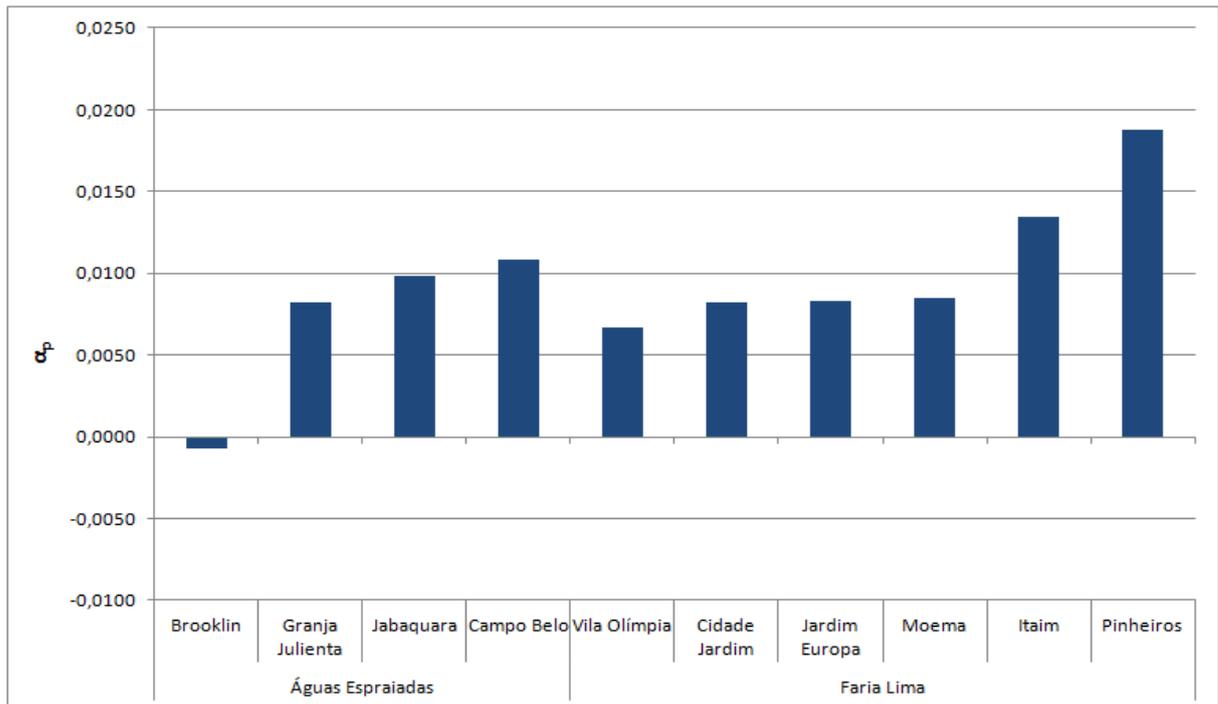
Bibi (os residentes de Moema e da Cidade Jardim movimentam o comércio desse bairro) bem como para Pinheiros (por conta da alta concentração de edifícios comerciais na Avenida Faria Lima).



**Gráfico 12: Taxa de Crescimento Composto do Preço para Imóveis Comerciais.**

Fonte: elaboração própria.

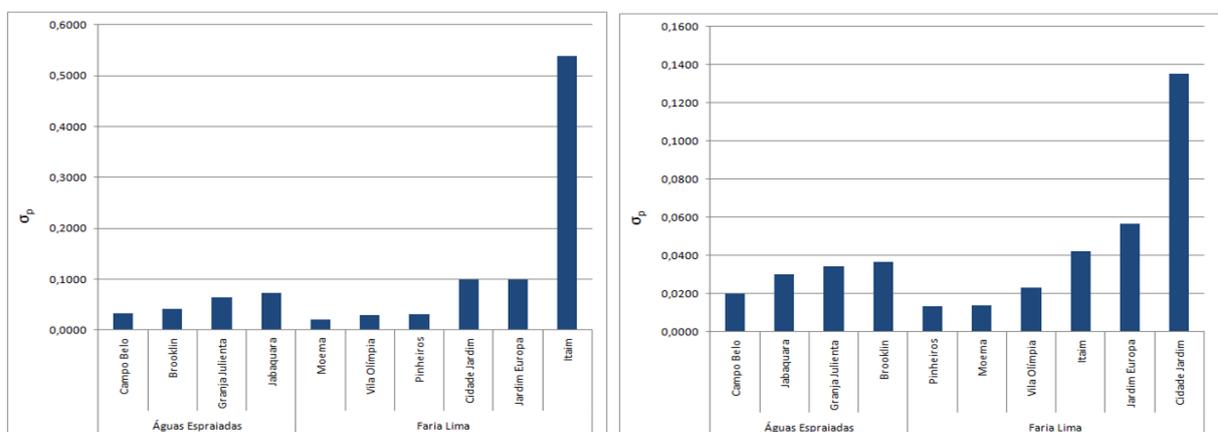
O gráfico 13 mostra os imóveis residenciais do tipo casa. O bairro de Pinheiros apresenta a maior taxa de crescimento composto do preço, seguido pelo Itaim. O Brooklin, por ser altamente residencial e um bairro mais antigo, obteve menor valorização, talvez por começar a apresentar um estado de saturação (ruas estreitas, menor espaço para construção de prédios).



**Gráfico 13: Taxas de Crescimento Composto do Preço para Casas.**

Fonte: elaboração própria.

Nos gráficos 14 e 15, as volatilidades por bairro chamam a atenção. O Cidade Jardim apresentou menor valorização de apartamentos, e, para qualquer número de dormitórios, obteve a maior volatilidade. O Jardim Europa possui um perfil semelhante, tendo grande volatilidade. Isso significa que quanto menor a valorização do imóvel, ou seja, menor o crescimento do preço por metro quadrado do apartamento, maior sua volatilidade. Como nos demais bairros houve uma crescente valorização, suas volatilidades são menores. A única exceção foi o bairro do Jabaquara no caso de um dormitório, com alta valorização e, ao mesmo tempo, alta volatilidade. Logo, nenhuma conclusão pode ser feita, pois um bairro foge à regra.

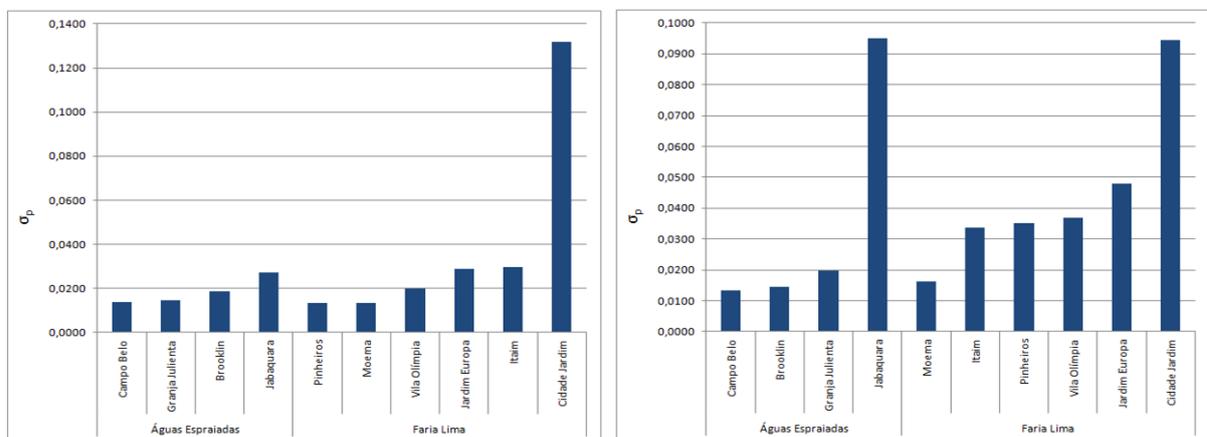


**Gráfico 14: Volatilidades das Taxas de Crescimento do Preço para Imóveis Residenciais de 1 (à Esquerda) e 2 (à Direita) Dormitórios.**

Fonte: elaboração própria.

Segundo Medeiros (2003), é possível que a oferta de apartamentos em alguns bairros seja mais homogênea do que nos outros analisados, levando a uma menor volatilidade na variação de preços. Dos que apresentam preços médios de venda mais altos, o Cidade Jardim destaca-se como o de maior volatilidade, para imóveis de um a quatro dormitórios, como se nota nos gráficos 14 e 15. Destaca-se também no gráfico 15 a volatilidade das taxas de crescimento dos preços para os imóveis de quatro dormitórios do Jabaquara.

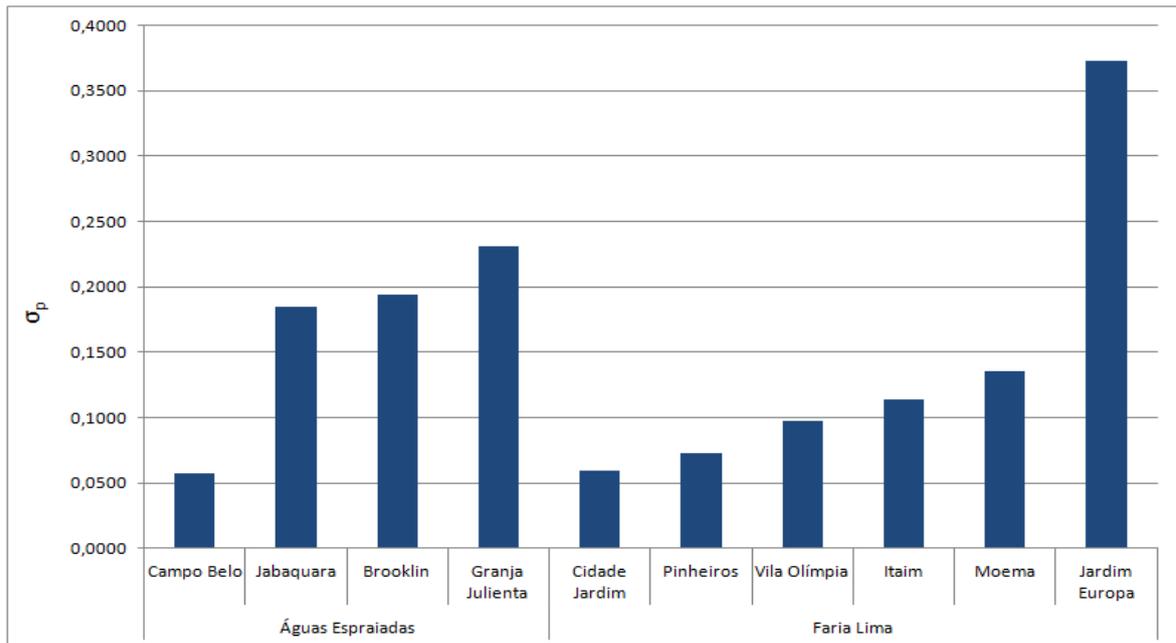
Para Lucena (1985), cada unidade habitacional possui características distintas, até mesmo para um mesmo prédio ou localização, levando a um produto final que possui alta heterogeneidade, com preços de venda bastante diferentes.



**Gráfico 15: Volatilidades das Taxas de Crescimento do Preço para Imóveis Residenciais de Três (à Esquerda) e Quatro (à Direita) Dormitórios.**

Fonte: elaboração própria.

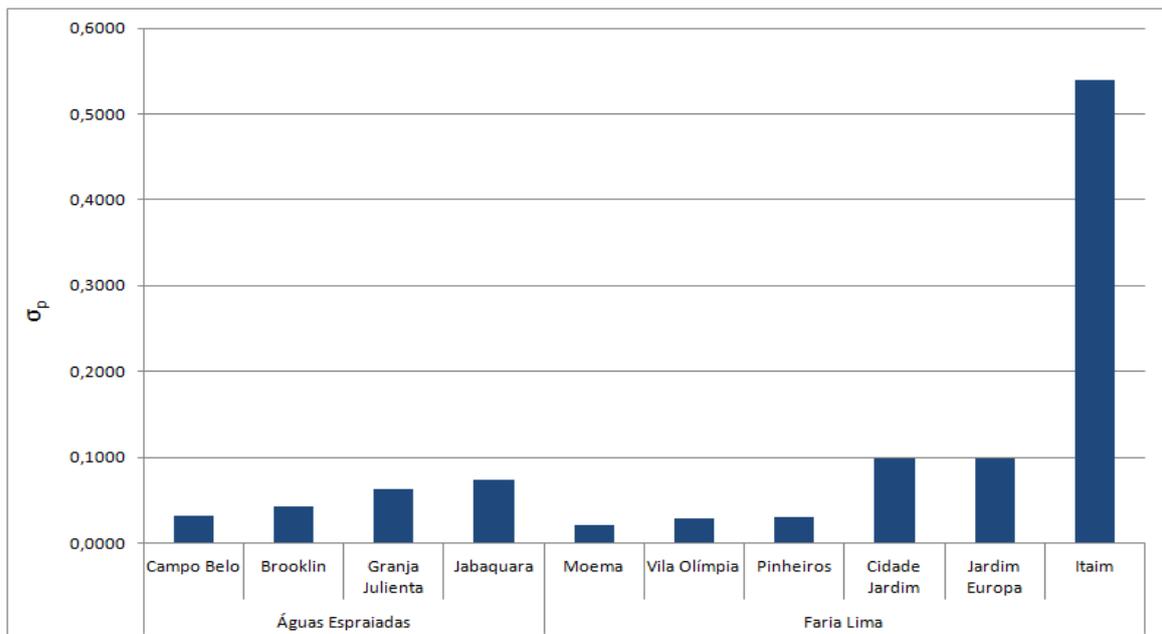
No gráfico 16, nota-se que o Jardim Europa apresentou maior volatilidade da taxa de crescimento do preço para imóveis comerciais, seguido por Granja Julieta, Brooklin e Jabaquara. Talvez por ser um bairro essencialmente residencial e de alto padrão de construção.



**Gráfico 16: Volatilidade da Taxa de Crescimento do Preço para Imóveis Comerciais.**

Fonte: elaboração própria.

O gráfico 17 mostra que o Itaim possui a maior volatilidade da taxa de crescimento dos preços para imóveis residenciais do tipo casa. Possivelmente por ser uma região mista, que, conforme a lei de zoneamento, pode ser tanto residencial quanto comercial, uma tendência para a cidade, a fim de se amenizar o problema do trânsito.



**Gráfico 17: Volatilidade da Taxa de Crescimento do Preço para Casas.**

Fonte: elaboração própria.

### 4.3 Regressões para os Preços dos Imóveis

Similarmente à regressão dos preços realizada por Quigg (1993), o mesmo se fez com o logaritmo do preço conforme as características da construção. As amostras foram separadas em categorias de uso, incluindo tanto os imóveis residenciais (apartamentos e casas) quanto os comerciais. Foram utilizados os dados de lançamentos imobiliários da Embraesp, para o período de 2005 a 2010.

A amostra foi separada em construções residenciais e comerciais. A variável dependente é o logaritmo do preço por metro quadrado  $\log P$ . As variáveis independentes são: área da construção  $AConstr$ , área do terreno  $ATerr$ , altura da edificação  $Altura$ , localidade  $L$ , e idade do imóvel (de acordo com a data de lançamento)  $Idade$  e tipo do imóvel (residencial ou comercial)  $T$ .  $L$  é um vetor de 11 variáveis *dummy*, representando os bairros das Operações Urbanas. Segue-se a seguinte equação de regressão:

$$\log P = c + \phi \log AConstr + \psi \log ATerr + a_1 T + a_2 Altura + a_3 Idade + a_4 L + e$$

Quigg (1993) utiliza os coeficientes das regressões para estimar o valor potencial da construção em um terreno vago. Nesta pesquisa, as regressões foram empregadas para formar o preço estimado por regressão das construções do banco de dados da Prefeitura, uma vez que ela não disponibilizou informações de preços.

No que concerne aos coeficientes de correlação de Pearson, há uma correlação de 0,893 entre o logaritmo do preço e o logaritmo da área construída, de 0,683 entre o logaritmo do preço e o da área do terreno. Também há uma correlação positiva alta entre o logaritmo da área construída e a altura de 0,694.

No que tange ao modelo, o coeficiente de correlação  $R$  foi de 0,921, e o  $R^2$ -Ajustado foi de 0,916. A estatística de Durbin-Watson foi de 1,94, indicando ausência de correlação serial. Sobre os coeficientes, o logaritmo da área construída possui um beta de 0,892. Já a área do terreno possui um coeficiente negativo, de -0,144, em relação ao preço do imóvel. A variável idade possui coeficiente negativo de -0,232.

Considerando as estatísticas de colineariedade, o logaritmo da área construída obteve um *Variance Inflation Factor* de 6,321 e o logaritmo da área do terreno de 4,226. A medida de *Tolerance* para essas variáveis é de 0,158 e de 0,237, respectivamente. Para Gujarati (2000) e para Hair (2005), um *VIF* de 1 até 10 significa uma multicolinearidade aceitável, e uma

medida de *Tolerance* entre 0,10 e 1 possui o mesmo significado. Logo, optou-se por considerar ambas as variáveis, uma vez que, ao considerar apenas uma, não houve mudanças consideráveis nos resultados da regressão. Ressalta-se que essas variáveis são importantes, pois o modelo deste trabalho considera o Coeficiente de Aproveitamento do terreno.

Sobre os testes de normalidade, como o número de amostras foi superior a 30, não se efetuou o teste de Shapiro-Wilk, mas sim o de Kolmogorov-Smirnov, que indicou uma distribuição normal, com significância de 0,689, acima do nível de significância de 0,050.

Para lidar com o quesito homocedasticidade, foi realizado o teste de Pesarán-Pesarán. Sua fórmula implica se regredir o quadrado dos resíduos padronizados como função do quadrado dos valores estimados padronizados. Após avaliar o quadrado dos valores padronizados, rejeitou-se a hipótese de resíduos heterocedásticos (significância de 0,601).

A estatística descritiva dos dados, suas correlações, coeficiente e todos os detalhes das regressões estão na seção 8.3 deste trabalho.

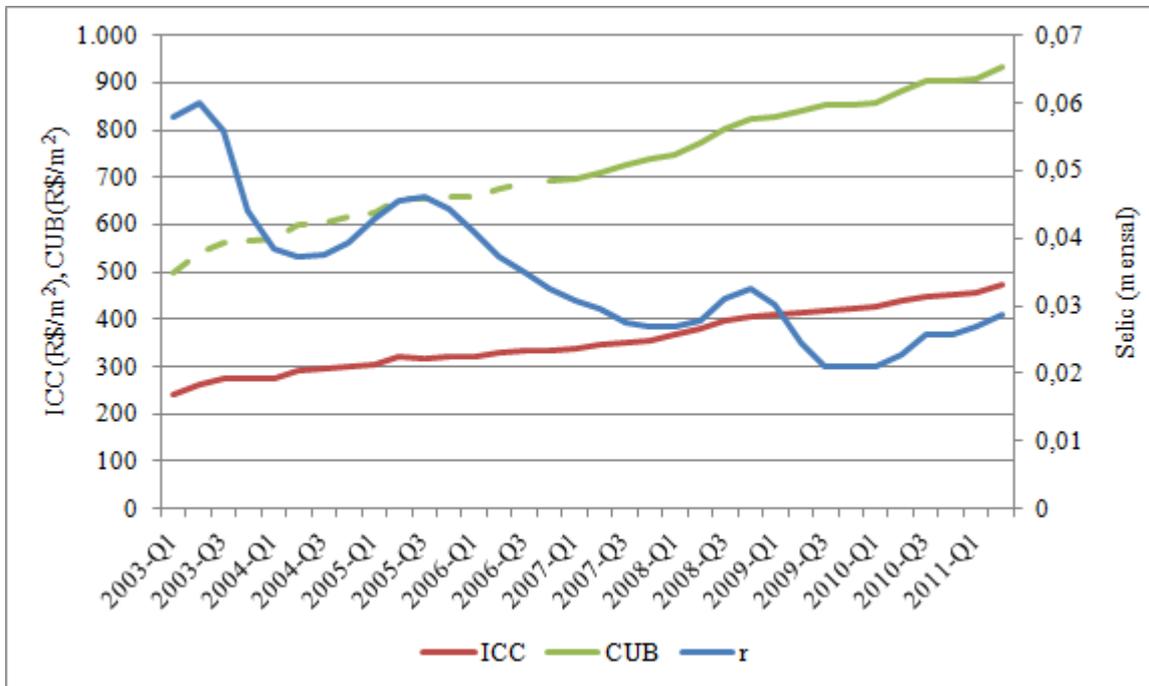
#### **4.4 Parâmetros do Custo de Construção**

Para estimar os parâmetros que definem o movimento geométrico browniano do custo de construção utilizou-se uma série de valores mensais do custo médio de construção por metro quadrado para a cidade de São Paulo, CUB-médio-SP, divulgada pelo Sinduscon/SP (Sindicato da Indústria da Construção Civil). Esse indicador é importante para o acompanhamento da evolução dos custos das edificações, e é também utilizado como um indicador macroeconômico dos custos do setor, embora represente só um custo parcial da obra, não considerando os custos adicionais, tais como fundações especiais, instalações prediais (água, esgoto, luz), elevadores, telefonia, etc. O CUB por metro quadrado tem sido referência para o reajuste dos contratos e custos das edificações financiadas.

Ele é calculado com base nos projetos-padrão de um, quatro, oito e doze pavimentos, de dois ou três quartos nos padrões de acabamento baixo, normal e alto, considerando-se os lotes básicos de insumos (materiais, mão de obra e equipamentos). A série utilizada foi a de um apartamento com oito pavimentos, dois quartos, padrão de acabamento normal. Essa série foi escolhida por ser a mais utilizada como preço do metro quadrado em São Paulo.

Também foi considerado o INCC, calculado pela Fundação Getúlio Vargas, a fim de verificar se o comportamento desse índice era semelhante ao do CUB. Concebido com a finalidade de aferir a evolução dos custos de construções habitacionais, configurou-se como o primeiro

índice oficial de custo da construção civil no país. Foi divulgado pela primeira vez em 1950, mas sua série histórica remete a janeiro de 1944. De início, o índice cobria apenas a cidade do Rio de Janeiro, então capital federal, e sua sigla era ICC.



**Gráfico 18: Evolução do CUB Médio (Verde), ICC (Vermelho) e Selic (Azul).**

Fonte: elaboração própria.

Nas décadas seguintes, a atividade econômica descentralizou-se e o IBRE passou a acompanhar os custos da construção em outras localidades. Além disso, em vista das inovações introduzidas nos estilos, gabaritos e técnicas de construção, o ICC teve que incorporar novos produtos e especialidades de mão de obra.

Em fevereiro de 1985, para efeito de cálculo do IGP, o ICC deu lugar ao INCC, índice formado a partir de preços levantados em oito capitais estaduais. No processo de ampliação de cobertura, o INCC chegou a pesquisar preços em vinte capitais. Atualmente a coleta é feita em sete (São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Salvador, Recife, Porto Alegre e Brasília).

Uma vez que houve uma mudança na metodologia de cálculo do CUB a partir de 2007, seus primeiros anos foram calculados com base no início do desenvolvimento do ICC (pois a correlação entre ICC e CUB entre 2007 e 2011 foi de 0,994, ambos apresentando um comportamento semelhante).

No Gráfico 18 pode-se perceber a relação entre a variação mensal do custo de construção por metro quadrado e as séries de CUB e ICC. Em ambos os indicadores, o principal responsável

pelo aumento nos custos foi o gasto com mão de obra. Na tabela 7, a correlação com o mercado corresponde à da variação no tempo dos índices CUB médio e ICC, sendo que o valor das ações das empresas de capital aberto de construção civil possui foco na construção de imóveis residenciais e comerciais no município de São Paulo.

**Tabela 7: O CUB Médio, Sua Correlação com Mercado, Taxa de Crescimento Composto e Volatilidade.**

|           | $\rho_{x,merc.}$ | $\alpha_x$ | $\sigma_x$ |
|-----------|------------------|------------|------------|
| Cub Médio | 0,2905           | 0,0053     | 0,0086     |
| ICC       | 0,1713           | 0,0041     | 0,0032     |

Fonte: elaboração própria.

De maneira semelhante à série de preços dos imóveis, retirou-se a primeira diferença do logaritmo natural das séries. Na tabela 7 encontram-se também os valores das estimativas da taxa de crescimento do custo de construção e de sua volatilidade, utilizando-se tanto a série do CUB-médio-SP quanto a do ICC. As duas apresentaram baixas volatilidades do custo de construção e taxas de crescimento semelhantes.

Embora a correlação do preço dos imóveis com os preços de mercado (preços das principais ações de construção civil listadas em bolsa de valores) fosse alta (esse fato será apresentado na próxima seção), a correlação do custo com o mercado foi de apenas 0,2905, como se nota na tabela 7.

#### 4.4.1 Prêmio de Risco

Para estimar a taxa de crescimento dos preços e do custo de construção, é necessário ajustar esses valores aos seus riscos. Para tanto, é preciso ter uma estimativa de risco de cada mercado, descrito pelo parâmetro  $\lambda_i$ , sendo que, quando  $i=1$ , o parâmetro refere-se ao custo de construção e quando  $i=2$ , este remete ao fluxo de caixa unitário gerado pela venda do imóvel.

Há uma maneira convencional de calcular tais parâmetros. Estima-se o prêmio pelo risco implícito dos fluxos de caixa descrito pelo parâmetro  $\lambda_i$ . Admitindo-se o valor do prêmio pelo risco do custo de construção como 1%,  $\lambda_1=0,01$ , calcula-se implicitamente o valor do prêmio pelo risco dos preços de venda dos imóveis para várias zonas e valores críticos.

$$\lambda_i = \operatorname{argmin}(y_t^* - y^*)^2$$

Nenhum dos autores pesquisados mostrou o cálculo de lambda, sendo esse um valor “dado”, em geral predito entre 0,8 e 1. Os autores fixaram o  $\lambda_i$  e realizaram análises de cenários com lambdas neste intervalo.

Entretanto, à luz de Williams (1991), sabe-se que a evolução estocástica dos custos unitários de construção  $x_1$  bem como a dos fluxos de caixa unitários  $x_2$  podem ser replicadas através de carteiras de ativos. Esses podem ser comercializados continuamente sem custos de transação, considerando um mercado em concorrência perfeita. Nesse mercado, existem duas carteiras de ativos negociáveis,  $i=1,2$ , tal que os retornos da carteira  $i$  são perfeitamente correlacionados com os incrementos estocásticos  $dz_i$ . Para cada carteira, o retorno excedido médio por unidade de desvio padrão é igual a uma constante  $\lambda_i$ .

Trigeorgis (2004) propõe que, com  $n$  variáveis subjacentes (que seguem processos de Wiener) e  $n + 1$  ativos negociáveis, uma carteira livre de risco  $P$  pode ser montada num intervalo  $dt$  de proporções (pesos)  $w_j$  investidos em cada ativo  $F_j$ , tendo um custo  $P = \sum_j w_j F_j$ .

Se os pesos  $w_j$  são selecionados, tal que o componente estocástico seja eliminado, então o retorno da carteira para o próximo período  $dt$ , para evitar oportunidades de arbitragem, precisa ser igual à taxa de juros livre de risco  $r$ , desde que  $\sum_j w_j (\mu_j - r) F_j = 0$ . A consistência entre esses dois conjuntos de condições (envolvendo  $n + 1$  equações nos  $n + 1$  pesos) também exige que:

$$\mu_i - r = \sum_i \lambda_i \sigma_i$$

A equação acima é basicamente um modelo multifator de precificação de ativos. O parâmetro  $\lambda_i \equiv (\mu_i - r)/\sigma_i$  (onde  $\mu_i$  é o retorno, incluindo os dividendos  $D_i$ ) é o  $i$ -ésimo preço de mercado pelo risco (ou recompensa pelo risco).  $RP_i$  é o prêmio pelo risco:

$$\lambda_i = \lambda_m \rho_{im}$$

$$RP_i = \lambda_m \rho_{im} \sigma_i$$

$$\lambda_m \equiv (\mu_m - r)/\sigma_m$$

O parâmetro  $\lambda_m$  representa o prêmio pelo risco de mercado por unidade de desvio-padrão. Considerando-se que seja possível construir uma carteira instantânea, usando preços da propriedade construída ( $P(x_2)$ ) numa segunda carteira de ativos substitutos ( $i=2$ ) com os

preços das ações das 22 construtoras de imóveis residenciais e comerciais listadas na Bovespa, foi constituída uma nova carteira, composta de  $P(x_2)$  e  $i=2$ , cujos retornos em  $i=1$  são perfeitamente correlacionados com os incrementos estocásticos  $dz_i$ , em uma proporção tal que a nova carteira fosse livre de risco, ou seja, de desvio-padrão igual a zero.

Para o cálculo do  $\lambda_m$ , primeiramente foram determinadas a taxa de crescimento composto do mercado e sua volatilidade:  $\mu_m = 0,0780$  ao ano e  $\sigma_m = 0,1254$ . Esse cálculo teve como base os preços das ações de empresas com operação na cidade de São Paulo e de construção civil com foco em imóveis, entre janeiro de 2008 e julho de 2011 (dados do Economática). Uma vez que  $\mu_m$  e  $\sigma_m$  são parâmetros fixos,  $\lambda_m$  (média anual) variou de acordo com a taxa de juros livre de risco,  $r$  (média anual), como observado na tabela 8.

**Tabela 8: Lambda de Mercado Utilizando o Valor das Ações da Construção Civil.**

| Ano  | $\lambda_m$ | Selic % |
|------|-------------|---------|
| 2003 | 0,480       | 1,78    |
| 2004 | 0,522       | 1,26    |
| 2005 | 0,505       | 1,46    |
| 2006 | 0,527       | 1,20    |
| 2007 | 0,546       | 0,95    |
| 2008 | 0,544       | 0,98    |
| 2009 | 0,558       | 0,80    |
| 2010 | 0,560       | 0,78    |
| 2011 | 0,549       | 0,92    |

Fonte: elaboração própria.

A tabela 9 mostra as correlações entre o preço dos imóveis e a carteira de mercado ( $\rho_{p,merc}$ ), entre as taxas de crescimento compostas do preço  $\alpha_p$  e suas volatilidades, para cada bairro  $\sigma_p$ . Já  $\omega^2$  não possui nenhum significado prático, servindo apenas para o cálculo de  $j$ . Este, por sua vez, será necessário para o cálculo do valor crítico  $z^*$ .

**Tabela 9: Parâmetros de Correlação, Taxa de Crescimento e Volatilidades.**

|                 | Comercial       |            |            |            | Apartamento     |            |            |            | Casa            |            |            |            |
|-----------------|-----------------|------------|------------|------------|-----------------|------------|------------|------------|-----------------|------------|------------|------------|
|                 | $\rho_{p,merc}$ | $\alpha_p$ | $\sigma_p$ | $\omega^2$ | $\rho_{p,merc}$ | $\alpha_p$ | $\sigma_p$ | $\omega^2$ | $\rho_{p,merc}$ | $\alpha_p$ | $\sigma_p$ | $\omega^2$ |
| Cidade Jardim   | 0,8758          | 0,0137     | 0,0595     | 0,0028     | -0,0950         | -0,0049    | 0,0734     | 0,0058     | 0,8744          | 0,0082     | 0,0168     | 0,0001     |
| Itaim           | 0,4910          | 0,0255     | 0,1133     | 0,0114     | 0,8872          | 0,0170     | 0,0161     | 0,0001     | 0,8786          | 0,0134     | 0,0675     | 0,0036     |
| Jardim Europa   | 0,4474          | 0,0310     | 0,3725     | 0,1352     | 0,3980          | 0,0272     | 0,0640     | 0,0033     | 0,9652          | 0,0083     | 0,0299     | 0,0005     |
| Moema           | -0,0349         | 0,0622     | 0,1356     | 0,0174     | 0,8797          | 0,0139     | 0,0131     | 0,0000     | 0,6572          | 0,0085     | 0,0402     | 0,0012     |
| Pinheiros       | 0,5475          | 0,0217     | 0,0729     | 0,0043     | 0,8887          | 0,0163     | 0,0144     | 0,0001     | 0,8748          | 0,0188     | 0,0181     | 0,0001     |
| Vila Olimpia    | -0,0049         | 0,0058     | 0,0970     | 0,0087     | 0,8958          | 0,0196     | 0,0163     | 0,0001     | 0,9303          | 0,0066     | 0,0424     | 0,0012     |
| Brooklin        | 0,3179          | -0,0327    | 0,1941     | 0,0363     | 0,8769          | 0,0144     | 0,0151     | 0,0001     | -0,5752         | -0,0007    | 0,0765     | 0,0065     |
| Campo Belo      | 0,7361          | 0,0133     | 0,0570     | 0,0024     | 0,8502          | 0,0143     | 0,0124     | 0,0000     | 0,8521          | 0,0108     | 0,0163     | 0,0001     |
| Jabaquara       | -0,6166         | -0,0187    | 0,1844     | 0,0349     | 0,9091          | 0,0189     | 0,0278     | 0,0004     | 0,8156          | 0,0099     | 0,0290     | 0,0004     |
| Granja Julienta | 0,5607          | 0,0370     | 0,2306     | 0,0519     | 0,9096          | 0,0216     | 0,0309     | 0,0005     | 0,7089          | 0,0082     | 0,0170     | 0,0001     |
| Morumbi         | 0,1593          | -0,0086    | 0,0759     | 0,0056     | 0,8754          | 0,0139     | 0,0137     | 0,0000     | 0,7873          | 0,0028     | 0,0204     | 0,0002     |

Fonte: elaboração própria.

A tabela 9 mostra que os preços dos imóveis comerciais nos bairros de Cidade Jardim, Campo Belo, Granja Julieta, Pinheiros e Itaim possuem alta correlação ( $\rho_{p,merc}$ ) com a carteira de mercado. No que diz respeito a apartamentos, houve um paralelismo muito acentuado entre seus preços e a carteira de mercado, exceto no caso da Cidade Jardim. Em se tratando de casas, todas as correlações foram altas, excetuando o Brooklin, que obteve uma correlação negativa.

Ainda na tabela 9, sobre as volatilidades dos preços dos imóveis  $\sigma_p$ , Jabaquara e Granja Julieta possuem o dobro da volatilidade dos demais bairros da Operação Água Espraiada. Talvez por possuírem áreas de menor densidade demográfica e serem pouco verticalizadas quando comparadas a Brooklin, Morumbi, Campo Belo. Já a Cidade Jardim e o Jardim Europa têm poucos apartamentos, por isso a volatilidade é alta.

Há outra explicação dada por Medeiros (2003) para a alta volatilidade de áreas nobres: os valores para o prêmio de risco variam muito ao longo do tempo nessas regiões, enquanto permanecem estáveis nas de baixo poder aquisitivo. É possível que esteja ocorrendo o efeito riqueza nas zonas nobres e de classe média, enquanto esse efeito é praticamente nulo para os bairros de baixo poder aquisitivo.

A tabela 10 mostra a taxa de crescimento do preço dos imóveis ajustada ao risco  $v_p$ , por ano e bairro. Esse parâmetro, uma vez negativo, significa que a taxa de retorno ajustada ao risco  $v_p$  é menor do que a taxa de retorno do ativo livre de risco  $i$  e que, portanto, seria mais vantajoso investir em ativos atrelados à Selic. A maior incidência de valores negativos de  $v_p$  é com relação a imóveis comerciais e casas. No caso dos apartamentos, eles são sempre positivos, desconsiderando a Cidade Jardim. De qualquer maneira, todos os valores são próximos de zero.

Através da tabela 10 nota-se também que o prêmio pelo risco de mercado por unidade de desvio-padrão  $\lambda_m$  foi crescente ao longo do tempo.

Tabela 10: O Parâmetro  $v_p$ , Taxa de Crescimento do Preço Ajustada ao Risco por Ano e Bairro.

|                      | Ano     |         |         |         |         |         |         |         |         |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                      | 2003    | 2004    | 2005    | 2006    | 2007    | 2008    | 2009    | 2010    | 2011    |
| $\lambda_m$          | 0,4802  | 0,5218  | 0,5053  | 0,5266  | 0,5464  | 0,5443  | 0,5583  | 0,5597  | 0,5486  |
| $v_{p\_comercial}$   |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| Cidade Jardim        | -0,0113 | -0,0135 | -0,0126 | -0,0137 | -0,0148 | -0,0146 | -0,0154 | -0,0154 | -0,0149 |
| Itaim                | -0,0012 | -0,0036 | -0,0026 | -0,0038 | -0,0049 | -0,0048 | -0,0056 | -0,0057 | -0,0051 |
| Jardim Europa        | -0,0490 | -0,0559 | -0,0532 | -0,0567 | -0,0600 | -0,0597 | -0,0620 | -0,0622 | -0,0604 |
| Moema                | 0,0645  | 0,0647  | 0,0646  | 0,0647  | 0,0648  | 0,0648  | 0,0649  | 0,0649  | 0,0648  |
| Pinheiros            | 0,0026  | 0,0009  | 0,0016  | 0,0007  | -0,0001 | 0,0000  | -0,0005 | -0,0006 | -0,0002 |
| Vila Olímpia         | 0,0060  | 0,0061  | 0,0060  | 0,0061  | 0,0061  | 0,0061  | 0,0061  | 0,0061  | 0,0061  |
| Brooklin             | -0,0623 | -0,0649 | -0,0639 | -0,0652 | -0,0664 | -0,0663 | -0,0671 | -0,0672 | -0,0665 |
| Campo Belo           | -0,0068 | -0,0086 | -0,0079 | -0,0088 | -0,0096 | -0,0095 | -0,0101 | -0,0101 | -0,0097 |
| Jabaquara            | 0,0358  | 0,0406  | 0,0387  | 0,0411  | 0,0434  | 0,0431  | 0,0447  | 0,0449  | 0,0436  |
| Granja Julienta      | -0,0251 | -0,0305 | -0,0284 | -0,0311 | -0,0337 | -0,0334 | -0,0352 | -0,0354 | -0,0340 |
| Morumbi              | -0,0144 | -0,0149 | -0,0147 | -0,0150 | -0,0152 | -0,0152 | -0,0153 | -0,0154 | -0,0152 |
| $v_{p\_apartamento}$ |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| Cidade Jardim        | -0,0016 | -0,0013 | -0,0014 | -0,0012 | -0,0011 | -0,0011 | -0,0010 | -0,0010 | -0,0011 |
| Itaim                | 0,0102  | 0,0096  | 0,0098  | 0,0095  | 0,0092  | 0,0092  | 0,0090  | 0,0090  | 0,0092  |
| Jardim Europa        | 0,0150  | 0,0139  | 0,0143  | 0,0138  | 0,0133  | 0,0133  | 0,0130  | 0,0129  | 0,0132  |
| Moema                | 0,0083  | 0,0079  | 0,0080  | 0,0078  | 0,0076  | 0,0076  | 0,0074  | 0,0074  | 0,0075  |
| Pinheiros            | 0,0102  | 0,0096  | 0,0098  | 0,0096  | 0,0093  | 0,0093  | 0,0091  | 0,0091  | 0,0093  |
| Vila Olímpia         | 0,0126  | 0,0120  | 0,0122  | 0,0119  | 0,0116  | 0,0116  | 0,0114  | 0,0114  | 0,0116  |
| Brooklin             | 0,0081  | 0,0075  | 0,0077  | 0,0075  | 0,0072  | 0,0072  | 0,0070  | 0,0070  | 0,0072  |
| Campo Belo           | 0,0092  | 0,0088  | 0,0089  | 0,0087  | 0,0085  | 0,0085  | 0,0084  | 0,0084  | 0,0085  |
| Jabaquara            | 0,0068  | 0,0057  | 0,0061  | 0,0056  | 0,0051  | 0,0052  | 0,0048  | 0,0048  | 0,0051  |
| Granja Julienta      | 0,0081  | 0,0070  | 0,0074  | 0,0068  | 0,0063  | 0,0063  | 0,0059  | 0,0059  | 0,0062  |
| Morumbi              | 0,0081  | 0,0077  | 0,0078  | 0,0076  | 0,0074  | 0,0074  | 0,0072  | 0,0072  | 0,0073  |
| $v_{p\_casa}$        |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| Cidade Jardim        | 0,0012  | 0,0006  | 0,0008  | 0,0005  | 0,0002  | 0,0002  | 0,0000  | 0,0000  | 0,0002  |
| Itaim                | -0,0150 | -0,0175 | -0,0165 | -0,0178 | -0,0190 | -0,0188 | -0,0197 | -0,0197 | -0,0191 |
| Jardim Europa        | -0,0056 | -0,0068 | -0,0063 | -0,0069 | -0,0075 | -0,0075 | -0,0079 | -0,0079 | -0,0076 |
| Moema                | -0,0042 | -0,0053 | -0,0049 | -0,0054 | -0,0060 | -0,0059 | -0,0063 | -0,0063 | -0,0060 |
| Pinheiros            | 0,0112  | 0,0105  | 0,0108  | 0,0104  | 0,0101  | 0,0102  | 0,0099  | 0,0099  | 0,0101  |
| Vila Olímpia         | -0,0123 | -0,0140 | -0,0133 | -0,0141 | -0,0149 | -0,0148 | -0,0154 | -0,0154 | -0,0150 |
| Brooklin             | 0,0204  | 0,0222  | 0,0215  | 0,0225  | 0,0233  | 0,0232  | 0,0239  | 0,0239  | 0,0234  |
| Campo Belo           | 0,0041  | 0,0036  | 0,0038  | 0,0035  | 0,0032  | 0,0033  | 0,0031  | 0,0030  | 0,0032  |
| Jabaquara            | -0,0015 | -0,0025 | -0,0021 | -0,0026 | -0,0031 | -0,0030 | -0,0033 | -0,0034 | -0,0031 |
| Granja Julienta      | 0,0024  | 0,0019  | 0,0021  | 0,0019  | 0,0016  | 0,0017  | 0,0015  | 0,0015  | 0,0016  |
| Morumbi              | -0,0049 | -0,0056 | -0,0053 | -0,0057 | -0,0060 | -0,0059 | -0,0062 | -0,0062 | -0,0060 |

Fonte: elaboração própria.

#### 4.4.2 Covariância

O estimador da covariância utilizado entre os preços de venda dos imóveis e os custos de construção pode ser descrito como:

$$cov(X_1, X_2) = \sum_{j=1}^n (X_{1j} - \mu_1)(X_{2j} - \mu_2)$$

Para Quigg (1993) as estimativas possuíam um valor muito baixo, próximos a zero, entre as séries de custo de construção e preço de venda. Isso ocorre por conta da defasagem do preço de venda em relação ao custo de construção, ou seja, uma variação no custo leva algum tempo para ser refletida nos preços dos imóveis.

Medeiros (2003) inicialmente considera a covariância entre os preços de venda dos imóveis e os custos de construção aproximadamente nula. No entanto, posteriormente, essa hipótese é relativizada e a autora admite ser possível uma correlação entre o movimento dos preços de venda e do custo de construção. Ela calcula a covariância para cada bairro, que resulta em coeficientes de correlação. Conforme o coeficiente de correlação aumenta, e, conseqüentemente, também a covariância, a densidade ótima permanece inalterada, enquanto que os valores críticos  $z^*$  são reduzidos.

Neste trabalho verificou-se empiricamente que as correlações entre o custo de construção e o preço são altas. Uma tentativa de explicar esse fato é que o argumento da defasagem não é necessariamente válido, pois, através do alto crédito no Brasil, o financiamento permite às construtoras obterem recursos antes mesmo de começar a obra.

#### 4.4.3 Retorno do Ativo Livre de Risco

Como *proxy* do retorno do ativo sem risco, uma série mensal anualizada para a taxa de juros Selic divulgada pelo Banco Central foi utilizada, no período de 2004 a 2011. Contudo, o modelo revelou-se altamente sensível à taxa de juros livre de risco, sendo necessário fixá-la para realizar análises de sensibilidade. Optou-se por restringir a média por períodos, pois, se uma só média fosse usada para toda a série, iria se projetar para o futuro uma taxa de retorno livre de risco muito elevada, não sendo compatível com a tendência de estabilização.

A fim de que tanto a propriedade construída quanto o terreno vago possuam valores finitos, é preciso que a taxa de juros satisfaça a seguinte desigualdade:

$$v_p < i \leq 1 + v_p$$

Entretanto, calculando as expectativas de taxa de crescimento dos retornos dos preços de venda ajustados ao risco,  $v_p$ , nota-se que a alta variação da Selic e a utilização de retornos dos ativos sem risco inferiores ao valor escolhido tornariam inviável os cálculos para algumas regiões, por não satisfazerem a desigualdade.

Uma vez que durante o período de análise deste trabalho a Selic, *proxy* utilizado para a taxa de juros livre de risco, sofreu uma redução gradual significativa de 24,90% a.a. em janeiro de 2003 até 10,66% em dezembro de 2010, optou-se por fixar um novo valor dessa taxa para cada imóvel estudado. Assim, a taxa de juros livre de risco constante utilizada no estudo de cada um dos imóveis foi o valor da Selic no mês do lançamento do respectivo imóvel.

#### 4.4.4 Restrições Legais

O investidor está sujeito a restrições legais, impostas pelo tamanho máximo da construção, caracterizadas pelo parâmetro  $\delta$ . Para estimar esse parâmetro, utilizou-se o Coeficiente de Aproveitamento do Terreno, conforme estabelecido pela Lei de Zoneamento da Cidade de São Paulo. O Zoneamento da Cidade de São Paulo é uma forma de regulamentar a ocupação da cidade e ocorreu, primeiramente, em 1934 pelo Ato nº 663, de 10 de agosto, que consolidava a Legislação de Zoneamento da cidade e o código de obras. Essa primeira aplicação permaneceu vigente durante quatro décadas, disciplinando o uso e a ocupação do solo parcial do município.

Segundo Wilderode (1997), essa legislação foi substituída pelo Plano Diretor de Desenvolvimento Integrado/PDDI-Lei nº 7.688/71, proposto em 1972. Criado para orientar e localizar as zonas, esse plano fazia um estudo sobre a intensidade populacional, dimensões, taxa de ocupação e coeficiente de aproveitamento dos lotes.

Durante quarenta anos não houve alterações significativas na legislação, somente através do Plano Diretor de Desenvolvimento Estratégico - PDE, aprovado pela Lei nº 13.430/02, foram fixadas novas diretrizes gerais a respeito do uso e da ocupação do solo. Essa política pública de desenvolvimento urbano deve ser seguida por todos os agentes públicos e privados que atuam no município.

O Estatuto da Cidade (Lei Federal nº 10.257/01) é uma norma de ordem pública, sancionada em 10 de julho de 2001, que regulamenta o artigo 182 da Constituição Federal de 1988. Ele

assegura aos municípios o direito de fixar coeficientes de construção e usos permitidos e, ao mesmo tempo, outorgar, onerosamente, um direito de construir acima do coeficiente de aproveitamento básico existente ou de alteração do uso do solo. Também permite a criação de Operações Urbanas Consorciadas por meio de leis específicas e o financiamento das Intervenções por meio da Distribuição de CEPAC.

Quaisquer leis, federais ou municipais, estão sujeitas a modificações por outras leis ou podem ser revogadas, expressa ou tacitamente, mediante iniciativa do Poder Legislativo e sanção do Poder Executivo e impactar negativamente a valorização, a negociabilidade e a validade dos CEPACs. Assim qualquer alteração na legislação que disciplina os CEPAC poderá acarretar em prejuízo para os investidores.

O Plano Diretor Estratégico tem como objetivo desenvolver a cidade, formando polos industriais, comerciais e de serviços. Promovendo, assim, desenvolvimento social e cultural, manutenção das características originais de alguns bairros, proteção ao meio ambiente, ou seja, uma configuração do espaço urbano pautada pelo interesse público que assegure o bem-estar equânime de seus habitantes. Na qualidade de instrumento legal, essas normas podem impedir a construção de edificações irregulares em todo território.

Dentre as principais inovações do Plano Diretor Estratégico, no âmbito urbanístico ambiental, destaca-se o estabelecimento do controle da densidade de construção, importante para evitar a sobrecarga da infraestrutura instalada (água, esgoto, energia) e o congestionamento do sistema viário pelo tráfego e também pelo estacionamento ao longo das vias públicas.

Para equilibrar as diferenças de valor dos imóveis e o planejamento de determinadas áreas, o Plano Diretor Estratégico instituiu um coeficiente de aproveitamento único e uniforme para todo o solo urbano e a possibilidade de ultrapassá-lo onde a convivência urbanística expressa na lei o permitir, mediante o pagamento, à Prefeitura, de uma contrapartida ou através da adesão às Operações Urbanas. O coeficiente de aproveitamento básico foi definido como uma vez a área do terreno, ou duas vezes para certos locais. O coeficiente máximo geral é de 2,5 e 4,0 para certos locais providos de transporte de massa.

O período de tempo entre a promulgação do Plano Diretor Estratégico e dos Planos Regionais Estratégicos foi caracterizado pela incerteza quanto ao potencial construtivo dos terrenos e às demais posturas de zoneamento, o que gerou, em alguns locais da cidade, especulação dos preços.

Com a promulgação do Plano Regional Estratégico (Lei Nº 13.885/04), a partir da divisão do território municipal dentre as 31 subprefeituras, foram estabelecidas as zonas de uso e então definidos os coeficientes de aproveitamento básico, ou seja, a potencialidade construtiva à qual os proprietários têm direito sem o pagamento de contrapartida financeira ou de Outorga Onerosa.

Além da necessidade de adaptação às alterações de potencialidade construtiva por parte dos proprietários de imóveis, dos construtores, dos incorporadores e dos operadores, o mercado imobiliário sofreu desaceleração com o veto à consideração das áreas cobertas de garagem para fins do cálculo do coeficiente de aproveitamento.

Por esse motivo, de fevereiro a setembro de 2005 – quando foi promulgada a Lei Nº 14.044 – verificou-se novo período de estagnação, principalmente no segmento de terrenos incorporáveis já que, dependendo de sua área, do padrão do empreendimento e da quantidade de vagas, muitos projetos tornavam-se inviáveis. Quanto ao número de lançamentos, tanto residenciais quanto comerciais não se constatou impacto considerável, tendo em vista o estoque de projetos protocolados ou aprovados antes da vigência dos Planos Regionais Estratégicos (EMURB, 2008).

Após a promulgação da Lei 14.044 de 02 de setembro de 2005 – que regulariza a classificação das áreas cobertas de garagem como não computáveis – e com o conhecimento cada vez maior da legislação por parte da população, verifica-se tendência de crescimento do mercado imobiliário do Município de São Paulo.

O mercado do território englobado pela Operação Urbana Consorciada Água Espraiada também foi alvo das mesmas dificuldades verificadas de forma geral no Município de São Paulo (estagnação do mercado e desaceleração do ritmo das comercializações de terrenos incorporáveis e do número de lançamentos imobiliários).

Embora essa área também apresente tendência de crescimento, os dados ainda não são suficientes para a elaboração de estudos de alteração dos preços dos imóveis. Para análise do impacto gerado pelas alterações urbanísticas referentes aos Planos Regionais Estratégicos serão traçados, a seguir, paralelos entre as posturas atuais e as decorrentes dos zoneamentos em vigor.

O Plano Diretor e, mais especificamente, o zoneamento, é o instrumento em que o Coeficiente de Aproveitamento máximo é tipicamente definido. No zoneamento é comum encontrar

tabelas de parâmetros urbanísticos indicando os limites construtivos para cada zona. Esses limites costumam incluir, além do CA, a taxa de ocupação, o número máximo de pavimentos e os afastamentos a serem respeitados pelas edificações em relação às divisas do lote.

Os Estoques de Potencial Construtivo estão previstos nas Leis 13.430/02 (Plano Diretor Estratégico) e 13.885/04 (Disciplina e Ordena o Parcelamento, Uso e Ocupação do Solo). Diretamente ligados às modalidades da Outorga Onerosa e Áreas de Intervenção Urbana, eles constituem excedentes para construção, previstos nas legislações supracitadas. Para o controle da densidade construtiva e da função social da propriedade é preciso conhecer os conceitos de coeficiente básico e coeficiente máximo, os chamados coeficientes de aproveitamento (existe ainda o Coeficiente Mínimo, mas ele só é usado para definir se um terreno ou edificação está cumprindo sua função social).

O Coeficiente de Aproveitamento (CA) ou Índice de Aproveitamento (IA) é um número que, multiplicado pela área de um terreno, indica a quantidade total de metros quadrados passíveis de serem construídos. Num terreno de 1200m<sup>2</sup>, por exemplo, com um CA máximo igual a 2,4, a área máxima a ser construída, somando a de todos os pavimentos, é igual a 2.880,0 m<sup>2</sup>. Esse coeficiente não inclui garagens, sacadas (nos edifícios), beirais, áreas abertas (tais como piscinas), áticos (desde que não ultrapassem uma porcentagem da área do pavimento-tipo).

O coeficiente básico é o quanto se pode construir num terreno qualquer, sem que existam encargos financeiros adicionais. Eles variam entre 1 e 2. Ou seja, se o coeficiente é 1, pode-se levantar uma edificação com a mesma área do terreno em questão. Se o coeficiente for 2, é permitido que se construa o dobro da área do terreno.

O coeficiente máximo varia entre 2 e 4. Um índice 4, por exemplo, significa que o empreendedor pode construir quatro vezes a área do terreno. Ele deve pagar por isso, mas somente sobre o que excede o coeficiente mínimo. Ou seja, se o coeficiente mínimo para a área é 2 e o máximo é 4, ele paga sobre 2. Os outros 2 são de graça. Exemplificando com um terreno de 1.000 m<sup>2</sup>: pode-se construir 4.000 m<sup>2</sup>, mas paga-se um valor adicional somente sobre 2.000 m<sup>2</sup>.

A tabela 11 mostra os coeficientes de aproveitamento para diferentes zonas de uso da cidade de São Paulo. As características das zonas de uso são divididas em três densidades: baixa (ZER-1), média (ZM-2) e alta (ZM-3). As Zonas Exclusivamente Residenciais possuem baixas densidades demográficas e construtivas e são destinadas exclusivamente ao uso

residencial. Já as Zonas Mistas podem ser de média ou alta densidade e destinam-se à implantação de usos residenciais e não residenciais, de comércio, de serviços e indústrias, conjuntamente aos usos residenciais. Nas Zonas Mistas do tipo “a” o coeficiente básico é de apenas 1, nas zonas do tipo “b” o coeficiente básico é sempre 2, indicando maior potencial construtivo.

**Tabela 11: Coeficientes de Aproveitamento para Diferentes Zonas de Uso.**

| Características das Zonas | Zonas de Uso        | Coeficiente de Aproveitamento |        |        |
|---------------------------|---------------------|-------------------------------|--------|--------|
|                           |                     | Mínimo                        | Básico | Máximo |
| ZER1 - Baixa Densidade    | ZER-1/06            | 0,05                          | 1      | 1      |
| ZM - Média Densidade      | ZM-2                | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/11             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/12             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/13             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/14             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/15             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/16             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM-2/19             | 0,2                           | 1      | 2      |
|                           | ZM - Alta Densidade | ZM - 3b                       | 0,2    | 2      |
| ZM - 3b/08                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |
| ZM - 3b/11                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |
| ZM - 3b/12                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |
| ZM - 3b/14                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |
| ZM - 3b/15                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |
| ZM - 3b/17                |                     | 0,2                           | 2      | 2      |

Fonte: Plano Diretor Estratégico da Cidade de São Paulo (2002).

De acordo com a Secretaria Municipal de Finanças (2011), o valor venal dessas transações é definido pelo metro quadrado do IPTU respectivo. Se quem vende esse potencial de construção for um órgão público, a receita correspondente é destinada ao Fundo de Desenvolvimento Urbano (FUNDURB). Caso seja um particular, a regra é outra. Somente quem possui terrenos na ZEIS de Paraisópolis ou um imóvel tombado pode efetuar esse tipo de transação. E o destino dos recursos também é outro. Eles deverão ser aplicados em áreas próximas a linhas de metrô ou férreas, numa faixa de 300 metros ou ainda num raio máximo de 600 metros dessas estações.

Para conhecer todos os coeficientes básicos e máximos, basta consultar cada Plano Regional Estratégico (Lei 13.885/04). Vale lembrar ainda que os Estoques de Potencial Construtivo não são previstos para as Operações Urbanas. Nesse caso, é o Certificado de Potencial Adicional de Construção (CEPACs) o instrumento que viabiliza as operações.

Cada operação urbana, para que possa ser posta em prática, necessita de lei específica. Ou seja, não há uma regra uniforme para todas as operações urbanas, mas sim regras particulares como, por exemplo, o índice de conversão dos CEPACs em metros quadrados adicionais de construção. A Operação Urbana Faria Lima, por exemplo, é dividida em setores e cada um deles possui uma regra diferente de conversão. Vale ainda dizer que existe uma diferenciação entre estoques residenciais e não residenciais para cada operação urbana ou para distritos do município de São Paulo que não são contemplados com esse instrumento urbanístico e que, portanto, são regidos pela regra da Outorga Onerosa.

Para enquadrar cada imóvel à sua respectiva área de zoneamento e descobrir quais os seus coeficiente de aproveitamento básico e máximo, utilizou-se o Google Earth. O mapa de cada região, com a delimitação das zonas, dado por cada Plano Regional Estratégico (Lei 13.885/04) foi projetado nessa ferramenta. A seguir, verificou-se cada endereço, a fim de identificar a qual zona o imóvel pertencia. Essa ferramenta também foi utilizada para demonstrar a qual setor de cada operação urbana o imóvel pertencia (uma vez que a conversão de um CEPAC em metros quadrados depende do setor no qual será construído o imóvel), projetando o mapa das operações e verificando cada endereço.

A equação de metro quadrado de área adicional de construção é dada por:

$$M_p^2 = m_t (Coef_{CEPAC} - Coef_{básico})$$

Onde:

$M_p^2$  é a quantidade de metros quadrados de área adicional de construção,

$m_t$  é o metro quadrado potencial de terreno da quadra analisada,

$Coef_{CEPAC}$  é o coeficiente de aproveitamento máximo permitido no perímetro da Operação Urbana,

$Coef_{básico}$  é o coeficiente de aproveitamento básico do zoneamento em que a quadra está inserida permitido pela legislação vigente.

Além do preço do CEPAC no mercado primário, foram obtidos seus preços no secundário por meio da Bovespa. Entretanto, estes não foram utilizados, devido ao pequeno número de transações.

Os CEPACs representam um custo adicional de construção, a fim de atingir o coeficiente máximo de aproveitamento do terreno. Assim, adicionou-se o preço do CEPAC à equação do custo.

#### 4.5 Incluindo os CEPACs no Modelo

Adicionado à equação do custo, cada CEPAC possui um coeficiente máximo e um coeficiente básico, de acordo com a legislação vigente. Além disso, cada um é capaz de converter diferentes quantidades de área de acordo com a localidade. Ao permitir ampliar a densidade máxima de construção (menor restrição), o efeito dos CEPACs é o aumento do valor crítico  $z^*$  e da densidade ótima de construção, além da elevação do custo de construção e do valor do terreno vago e de uma redução imediata no valor da propriedade construída. Com as intervenções governamentais posteriores, deve haver valorização da região e, por consequência, do imóvel.

No modelo deste trabalho, os CEPACs são adicionados à equação do custo de construção de Williams (1991), considerando-se a diferença entre o coeficiente máximo e o básico de aproveitamento, seu preço negociado (a densidade representa a razão entre a área construída e a área do terreno):

$$X(q) = q^\gamma x_1 + \theta * M_p^2 * PCepac$$

em que  $x_1$  tem como *proxy* o CUB-médio, sendo o custo de construção por metro quadrado. A variável  $q$  é medida em metros quadrados, sendo limitada por  $\delta$ , o coeficiente máximo permitido pela Lei de Zoneamento. O preço do CEPAC ( $P_{cepac}$ ) é multiplicado pelo metro quadrado de área adicional de construção ( $M_p^2$ ), sendo  $\theta$  a taxa de conversão de CEPACs em metros quadrados adicionais.  $\gamma$  representa a elasticidade de escala do custo de construção.

A tabela 12 mostra a conversão de cada CEPAC em metros quadrados. Para a Operação Faria Lima, em todos os setores, um CEPAC é capaz de converter mais metros quadrados nas construções residenciais do que nas comerciais. Nessa operação, o setor da Faria Lima possui o menor coeficiente de conversão, uma vez que a região já possui alta densidade de imóveis comerciais. Na Operação Água Espraiada há maior conversão de CEPACs em metros quadrados, sendo que o Jabaquara possui o maior coeficiente. Nesse caso, há um maior equilíbrio entre a conversão residencial e a comercial.

**Tabela 12: Conversão de cada CEPAC em Metros Quadrados.**

| OPERAÇÃO<br>FARIA LIMA | SUB<br>SETORES                         | Equivalência de 1 CEPAC<br>em m <sup>2</sup> de área adicional de<br>construção computável |           |
|------------------------|--|--|-----------|
|                        |  | RESIDENCIAL  | COMERCIAL |
| SETOR 1                | 1a                                     | 1,2  | 0,8       |
| Pinheiros              | 1b                                     | 1,8  | 1,5       |
|                        | 1c                                     | 2,6  | 1,7       |
|                        | 1d                                     | 2,8  | 1,8       |
|                        | SETOR 2                                | 2a   | 0,8       |
| Faria Lima             | 2b                                     | 0,9  | 0,6       |
|                        | 2c                                     | 1,1  | 0,8       |
|                        | 2d                                     | 1,3  | 0,5       |
|                        | 2e                                     | 1,8  | 1,2       |
|                        | SETOR 3                                | 3a   | 1,2       |
| Hélio                  | 3b                                     | 1,2  | 1,0       |
| Pelegrino              | 3c                                     | 2,5  | 1,0       |
|                        | 3d                                     | 1,5  | 1,0       |
|                        | 3e                                     | 2,5  | 1,5       |
| SETOR 4                | 4a                                     | 0,9  | 0,6       |
| Olimpíadas             | 4b                                     | 2,0  | 0,9       |
|                        | 4c                                     | 2,0  | 1,2       |
|                        | 4d                                     | 2,0  | 1,0       |
|                        | <b>OPERAÇÃO<br/>ÁGUA<br/>ESPRAIADA</b> |  |           |
| Jabaquara              |  | 3,0  | 3,0       |
| Brooklin               |  | 1,0  | 1,0       |
| Berrini                |  | 1,0  | 1,0       |
| Marginal Pinheiros     |  | 2,0  | 2,0       |
| Chucri Zaidan          |  | 1,0  | 1,0       |

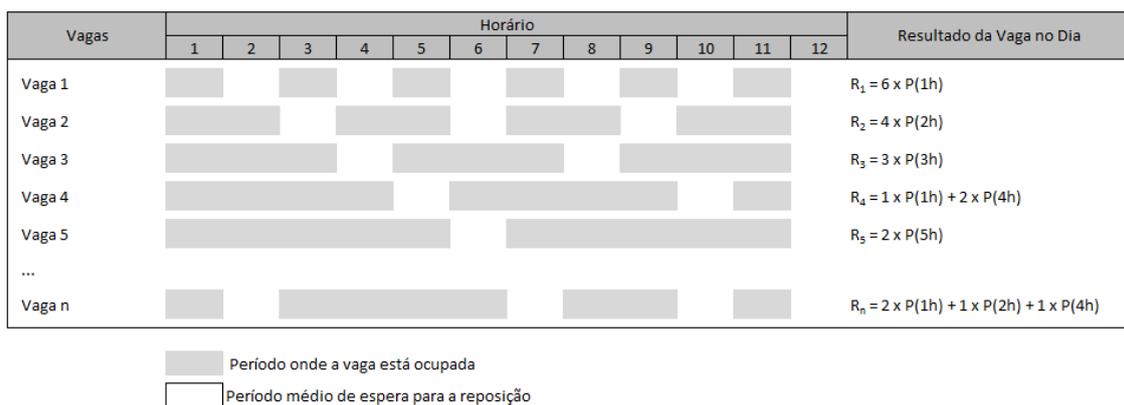
Fonte: Emurb (2008).

#### 4.6 Utilização Subótima do Terreno Vago

A utilização subótima do terreno vago,  $\beta$ , poderia assumir as mais diferentes formas como estacionamento, campo de futebol, eventos etc. No entanto, para efeitos de fluxo de caixa, o mais rentável em São Paulo é o estacionamento. A partir de dados fornecidos pelo Sindicato das Empresas de Estacionamentos de São Paulo (Sindepark/SP) foi possível obter dados sobre a região estudada.

Sabe-se que uma vaga ocupa  $25\text{m}^2$ , o espaço para estacionar um carro mais o espaço das manobras. O funcionamento por 24 horas, durante sete dias por semana, só ocorre em 20% dos estacionamentos e o horário normal é de doze horas em 21 dias. Dos clientes, apenas 3% são avulsos, devido à alta demanda de mensalistas. Para esses avulsos, o preço variou de acordo com o número de horas de permanência.

Considerou-se o número de permanência com intervalos médios de uma hora para reposição (troca) de veículos, de acordo com os dados fornecidos. Se, por exemplo, em doze horas de funcionamento, houver apenas estadias de uma hora, são contadas seis estadias. Se, nas mesmas doze horas, houver apenas estadias de duas horas para cada veículo, são quatro estadias, e assim por diante. Dessa maneira, dez carros estacionados, cada um deles com estadia de até trinta minutos, são equivalentes a um carro que ficou estacionado durante todo o período. A figura 6 mostra como o resultado de uma vaga é calculado.



**Figura 6: Exemplo de Como o Resultado de uma Vaga é Composto.**

Fonte: elaboração própria.

Foi possível concluir, com base nos dados fornecidos pelo Sindepark/SP, que a estratégia de precificação por tempo de estadia segue a lógica descrita anteriormente, de tal forma que a receita diária de uma vaga é praticamente constante, independentemente de quantos carros

foram estacionados e por quanto tempo ocuparam uma vaga. Portanto, a estratégia de precificação é:

$$R_1 \sim R_2 \sim R_3 \sim R_4 \sim R_5 \sim \dots \sim R_n \sim \text{Resultado de uma diária} = P(12h).$$

O resultado bruto mensal por vaga considera os 3% de clientes avulsos vezes a receita média avulsa e os 97% de mensalistas vezes a receita média mensalista com 20% dos estacionamentos trabalhando em regime 24 x 7. Já o resultado líquido mensal por vaga desconta 5% de ISS, 0,65% de PIS e 3% de Cofins. A tabela 13 mostra o estudo de cálculo da receita média mensal por vaga de estacionamento.

**Tabela 13: Estudo do Cálculo da Receita Média de Estacionamentos, Receita Mensal por Vaga.**

| Preço Médio               | 2005          | 2006          | 2007          | 2008          | 2009          | 2010          |
|---------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Até 30min                 | 3,37          | 3,66          | 3,81          | 4,48          | 6,01          | 5,41          |
| Até 1h                    | 5,29          | 5,66          | 5,59          | 6,71          | 8,22          | 8,90          |
| Até 2h                    | 7,02          | 7,53          | 7,50          | 8,93          | 11,19         | 12,49         |
| Até 3h                    | 8,48          | 9,08          | 9,09          | 10,84         | 13,95         | 15,96         |
| Período até 6h            | 12,35         | 12,88         | 13,47         | 15,55         | 20,22         | 24,50         |
| Período até 12h           | 19,47         | 19,22         | 20,46         | 22,71         | 29,35         | 31,83         |
| Período até 24h           | 37,39         | 38,59         | 39,67         | 45,90         | 60,05         | 66,28         |
| Diurno                    | 105,86        | 108,85        | 109,55        | 145,04        | 182,77        | 243,11        |
| Integral                  | 139,04        | 149,98        | 153,58        | 183,03        | 228,30        | 287,88        |
| 24 horas %                | 26,21         | 25,01         | 26,43         | 20,34         | 19,82         | 13,41         |
| Mensalistas %             | 97,60         | 97,45         | 97,69         | 96,16         | 90,57         | 93,90         |
| 24 horas                  | 162,66        | 175,65        | 177,49        | 228,93        | 376,59        | 391,61        |
| Não 24 horas              | 115,39        | 118,71        | 119,20        | 161,99        | 236,93        | 278,37        |
| Receita Média Bruta       | 127,78        | 132,94        | 134,60        | 175,60        | 264,60        | 293,56        |
| <b>Receita Média Liq.</b> | <b>116,73</b> | <b>121,45</b> | <b>122,96</b> | <b>160,41</b> | <b>241,72</b> | <b>268,17</b> |

Fonte: elaboração própria a partir de dados do Sindepark/SP.

Para o cálculo do valor do terreno subutilizado, utilizou-se a equação do  $\beta$ :

$$\beta P = \text{Área do terreno} \cdot \frac{\text{Receita Vaga Média}}{25}$$

onde P é o preço total do edifício, Área do Terreno representa a área de terreno vago e Receita Vaga Média/25m<sup>2</sup> é receita média por metro quadrado do estacionamento, operando no terreno vago, considerando-se vagas de 25m<sup>2</sup>.

Assim,  $\beta P$  significa a receita do estacionamento operando no terreno vago. O  $\beta$  representa o ganho com aluguel por unidade de preço do edifício.

Para o cálculo de  $\beta$ , a receita média por vaga foi dividida ( $25m^2$ ) e multiplicada pela área do terreno, assim:

$$\beta = \frac{\text{Área do terreno} \cdot \frac{\text{Receita Vaga Média}}{25}}{P}$$

**Tabela 14: Média e Desvio Padrão de  $\beta$  para cada Localidade (Média de Todos os Anos).**

|                | Média de $\beta$ | Desv.Padrão $\beta$ |
|----------------|------------------|---------------------|
| BROOKLIN       | 0,03%            | 0,01%               |
| CAMPO BELO     | 0,04%            | 0,02%               |
| GRANJA JULIETA | 0,06%            | 0,03%               |
| ITAIM          | 0,01%            | 0,01%               |
| JABAQUARA      | 0,11%            | 0,18%               |
| JD. EUROPA     | 0,02%            | 0,02%               |
| MOEMA          | 0,02%            | 0,01%               |
| PINHEIROS      | 0,03%            | 0,01%               |
| VILA OLÍMPIA   | 0,03%            | 0,02%               |

Fonte: elaboração própria.

Na Tabela 14 observam-se os valores de  $\beta$  por bairro. Esses valores são baixos. Uma explicação dada por Medeiros (2003) sobre tal fenômeno é que esses bairros são lucrativos para a venda de imóveis e, ao mesmo tempo, possuem uma lucratividade regular para estacionamentos nas regiões residenciais.

#### 4.7 Elasticidade do Custo de Construção e Tempo de Construção

Neste modelo considera-se a construção instantânea ( $\Theta = 0$ ), devido ao alto volume de crédito e à alta demanda.

De maneira distinta de Medeiros (2003) e Quigg (1993), o fator de escala da função custo de construção não foi único, mas específico para cada setor em sua respectiva operação urbana. A elasticidade do custo foi considerada dessa forma porque há indícios de que a localização, bem como diferentes padrões de construção possam influenciar a elasticidade do custo de construção,  $\gamma$ , uma vez que o custo por metro de construção utilizado (CUB Médio) é um índice que não considera as diferenças dos padrões de construção de cada localidade.

Na regressão do preço obteve-se o parâmetro  $\phi = 1,0024$  para imóveis residenciais e  $\phi = 0,5291$  para comerciais. No que diz respeito a todas as localidades os valores das elasticidades

de custo foram superiores a 1,  $\gamma > 1$ . Corroborando os estudos de Williams (1991) e Medeiros (2003), a função custo mostrou-se crescente e convexa.

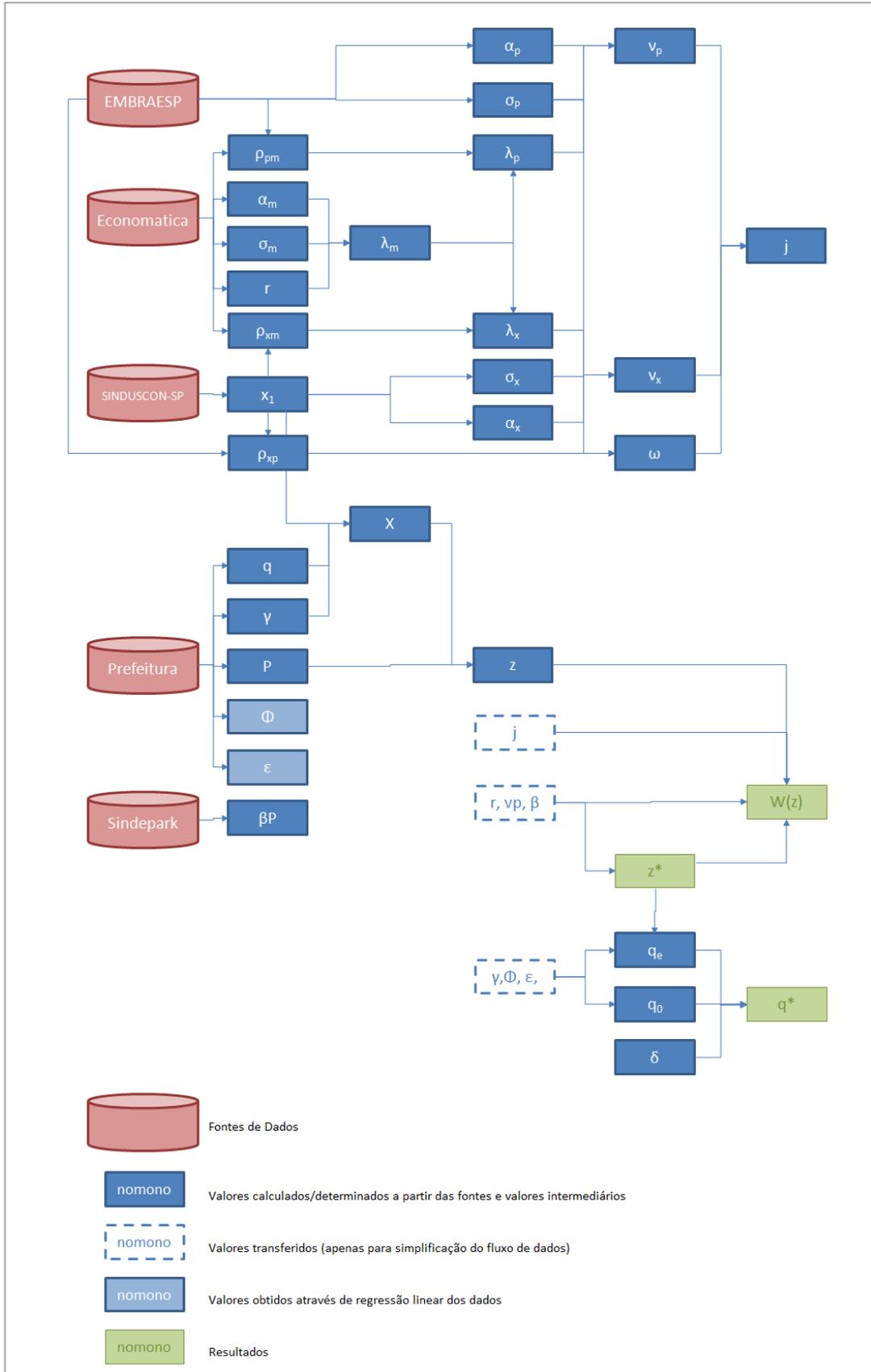
**Tabela 15: Elasticidade do Custo por Setor de Operação Urbana.**

| Operação   | Setor        | Gama |
|------------|--------------|------|
| ÁGUA       |              |      |
| ESPRAIADA  | JABAQUARA    | 1,07 |
| ÁGUA       | GRANJA       |      |
| ESPRAIADA  | JULIETA      | 1,07 |
| ÁGUA       |              |      |
| ESPRAIADA  | BROOKLIN     | 1,09 |
| FARIA LIMA | VILA OLÍMPIA | 1,09 |
| ÁGUA       |              |      |
| ESPRAIADA  | CAMPO BELO   | 1,11 |
| FARIA LIMA | PINHEIROS    | 1,11 |
| FARIA LIMA | ITAIM        | 1,14 |
| FARIA LIMA | JD. EUROPA   | 1,14 |
| FARIA LIMA | MOEMA        | 1,15 |

Fonte: elaboração própria.

Uma vez determinadas todas as estimativas e *proxies* dos parâmetros, inicia-se o desenvolvimento do modelo e a análise dos resultados.

O diagrama da figura 7 sumariza as fontes das informações e a interdependência das variáveis analisadas e mostra a sequência do cálculo de cada parâmetro para a obtenção dos resultados.



**Figura 7: Fluxograma dos Dados e Cálculo dos Parâmetros para Obtenção dos Resultados.**  
 Fonte: elaboração própria.

## 5. RESULTADOS DO MODELO

Nesta seção são exibidos os principais resultados do modelo, após o cálculo de todos os parâmetros. Na subseção seguinte, analisa-se o prêmio pela opção de se esperar para construir um imóvel. Na subseção 5.2 são calculados os valores críticos de  $z^*$ . Na subseção 5.3 são calculadas as densidades ótimas de construção.

### 5.1 O Prêmio pela Opção

Utilizando-se a diferença relativa entre o valor do terreno vago calculado pelo modelo de opções reais e seu valor intrínseco, isto é, a diferença relativa entre as equações (46) e (45) em relação à equação (45), são revelados os prêmios pela opção de se esperar para construir. Revisando o modelo proposto na seção 3.5:

$$\begin{cases} V(X, P) = P - X, & z \geq z^* \\ V(X, P) = \frac{\beta P}{i - \vartheta_p} + \frac{X}{j_1 - 1} \left( \frac{P/X}{z^*} \right)^{j_1}, & z < z^* \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} V^i(X, P) = P - X, & z \geq z^* \\ V^i(X, P) = \frac{\beta z}{i - \vartheta_p}, & z < z^* \end{cases} \quad (46)$$

A análise foi realizada, agrupando-se os lançamentos entre as Operações Água Espraiada e Faria Lima e acompanhando sua evolução ao longo dos anos entre 2003 e 2010, estabelecendo-se uma média anual.

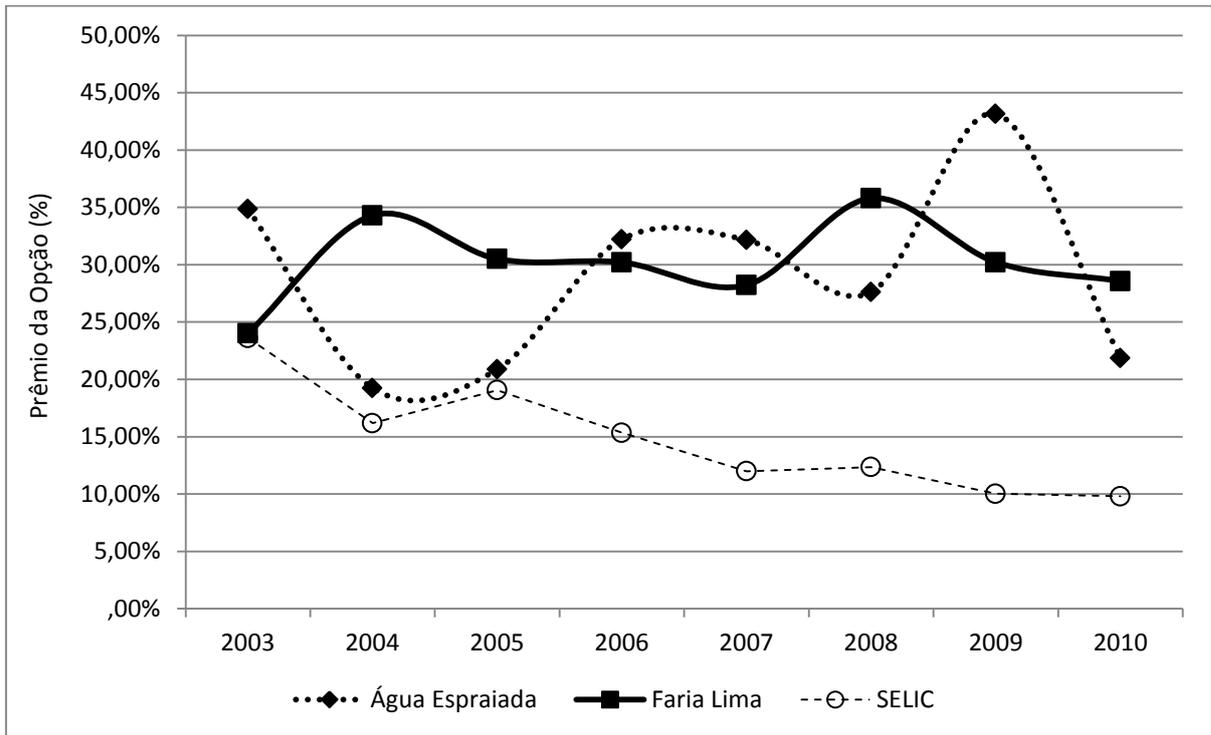
Conforme a tabela 16, o valor do terreno vago baseado no modelo de opções reais excede o valor intrínseco em todos os cenários, variando entre 16,6% e 61,0%, com média de 29,9% - 29,8% para a Água Espraiada e 30,1% para a Faria Lima. O maior prêmio obtido em média foi para os imóveis comerciais (37,9%), seguido do prêmio para apartamentos de 34,5% e para casas, de 23,9%. O maior prêmio obtido por esperar para construir foi para imóveis comerciais, na região da Operação Urbana Faria Lima (97,4%), em 2010. Já o menor prêmio foi o de casas, para a região da Água Espraiada, em 2010 (7,8%).

**Tabela 16: O Prêmio pela Opção por Operação Urbana e Total.**

| <b>Prêmio pela Opção</b> |                       |                   |                    |                     |
|--------------------------|-----------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
|                          | <b>Água Espraiada</b> | <b>Faria Lima</b> | <b>Média Geral</b> | <b>Selic (a.a.)</b> |
| <b>Apartamento</b>       | <b>31,6%</b>          | <b>36,5%</b>      | <b>34,5%</b>       |                     |
| 2003                     | 37,0%                 | 29,7%             | 33,1%              | 23,6%               |
| 2004                     | 20,0%                 | 35,5%             | 29,9%              | 16,2%               |
| 2005                     | 15,4%                 | 41,1%             | 31,0%              | 19,1%               |
| 2006                     | 34,7%                 | 41,9%             | 38,7%              | 15,4%               |
| 2007                     | 65,8%                 | 39,5%             | 43,3%              | 12,0%               |
| 2008                     | 34,7%                 | 37,7%             | 37,0%              | 12,4%               |
| 2009                     | 43,7%                 | 33,5%             | 41,8%              | 10,0%               |
| 2010                     | 35,9%                 | 15,5%             | 26,9%              | 9,8%                |
| <b>Casa</b>              | <b>24,6%</b>          | <b>23,5%</b>      | <b>23,9%</b>       |                     |
| 2003                     | 33,2%                 | 22,7%             | 28,7%              | 23,6%               |
| 2004                     | 7,5%                  | 34,9%             | 23,7%              | 16,2%               |
| 2005                     | 27,3%                 | 15,1%             | 18,4%              | 19,1%               |
| 2006                     | 5,4%                  | 18,4%             | 16,6%              | 15,4%               |
| 2007                     | 22,7%                 | 19,8%             | 20,8%              | 12,0%               |
| 2008                     | 3,5%                  | 33,9%             | 32,1%              | 12,4%               |
| 2009                     | 33,6%                 | 19,9%             | 23,5%              | 10,0%               |
| 2010                     | 7,8%                  | 26,7%             | 17,8%              | 9,8%                |
| <b>Comercial</b>         | <b>49,2%</b>          | <b>34,8%</b>      | <b>37,9%</b>       |                     |
| 2003                     | 51,7%                 | 18,4%             | 25,1%              | 23,6%               |
| 2004                     | 67,8%                 | 29,8%             | 38,2%              | 16,2%               |
| 2005                     | 35,9%                 | 49,3%             | 47,4%              | 19,1%               |
| 2006                     | 58,8%                 | 27,5%             | 31,0%              | 15,4%               |
| 2007                     | 41,3%                 | 27,2%             | 30,0%              | 12,0%               |
| 2008                     | 29,0%                 | 37,6%             | 35,7%              | 12,4%               |
| 2009                     | 64,6%                 | 57,8%             | 59,8%              | 10,0%               |
| 2010                     | 42,8%                 | 97,4%             | 61,0%              | 9,8%                |
| <b>Média</b>             | <b>29,8%</b>          | <b>30,1%</b>      | <b>29,9%</b>       |                     |

Fonte: elaboração própria.

A estabilização da economia brasileira e a conseqüente redução gradual da SELIC, utilizada como *proxy* da taxa de juros livre de risco, apresentou correlação negativa com a evolução dos prêmios da opção por esperar (-11,6% para a Operação Urbana Água Espraiada e -39,2% para a Operação Urbana Faria Lima). De fato, a redução da taxa de juros livre de risco provoca um crescimento no valor de  $z^*$ , atrasando o momento ótimo de construção, encarecendo o valor do terreno vago  $V$  e, por consequência, aumentando o prêmio por esperar. O gráfico 19 mostra a evolução do prêmio da opção em relação à SELIC.

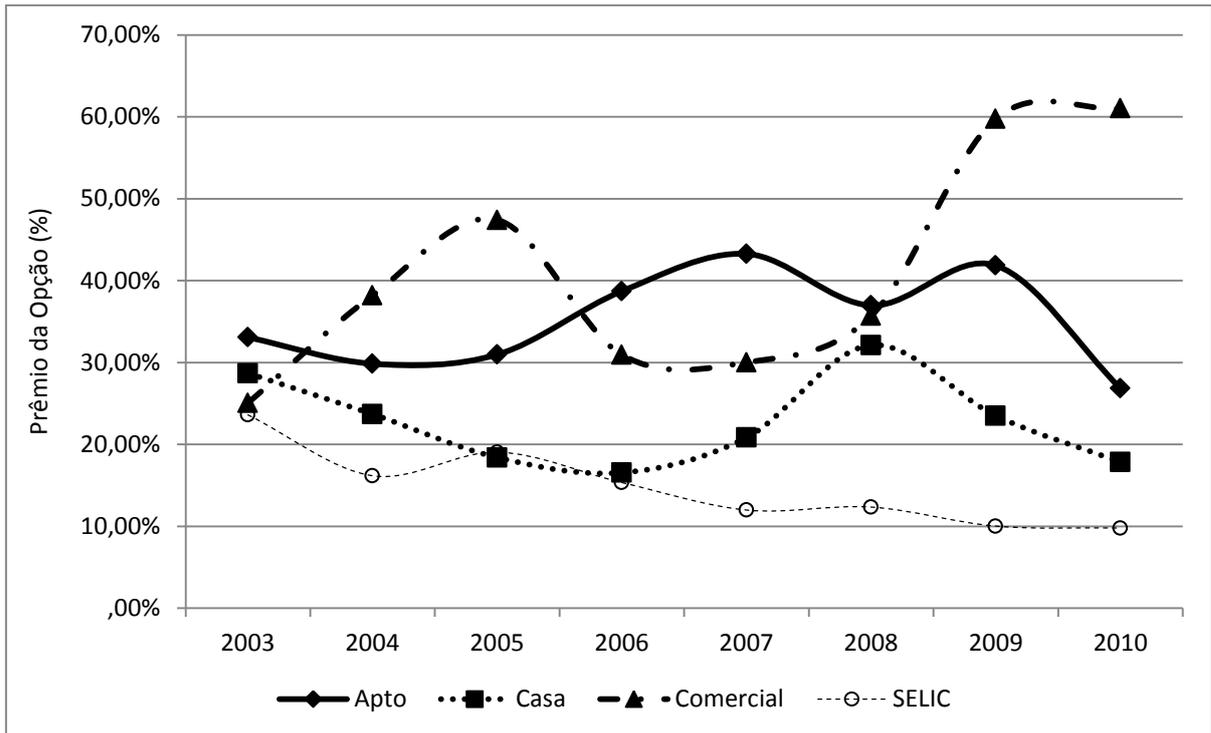


**Gráfico 19: Evolução do Prêmio da Opção por Esperar versus Operação Urbana.**

Fonte: elaboração própria.

O prêmio da opção por esperar observado nas casas é da ordem de dez pontos percentuais menor do que o observado nos edifícios comerciais e residenciais. Esse fato era previsto pelo modelo, uma vez que as construções de casas são mais frequentemente executadas por particulares antes do momento ótimo e com densidade sub-ótima, sem a utilização de instrumentos como Outorga Onerosa e CEPACs para ampliar o potencial de construção do terreno. Consequentemente,  $z < z^*$ ,  $q < q^*$  e o valor do terreno vago calculado pelo modelo de opções reais (V) é menor do que o observado nos terrenos utilizados para construção de edifícios comerciais e apartamentos, fazendo com que o prêmio pela opção de esperar também seja menor. O gráfico 20 mostra a evolução do prêmio por tipo de imóvel.

Os resultados corroboram o modelo de opções reais empiricamente. Segundo Quigg (1993), não existem motivos para o prêmio pela opção ser constante ao longo do tempo, nem entre as amostras, já que as propriedades construídas imediatamente devem ter um prêmio zero, enquanto que investidores que esperam para construir podem obter um prêmio de até 100% do valor do imóvel.



**Gráfico 20: Evolução do Prêmio da Opção por Esperar por Tipo de Imóvel.**

Fonte: elaboração própria.

Para Quigg (1993) e Cox e Rubinstein (1985), o prêmio encontrado deve representar um limite mínimo, pois, em todas as cidades testadas, as amostras representavam uma expansão. Segundo os autores, um prêmio maior é esperado em localidades de poucas construções, indicando que o valor do terreno vago representa uma opção de construir no futuro. Para Quigg (1993), a expansão da cidade e o prêmio por esperar para construir indicam que essas opções estão *in the money*.

Também é importante notar que não existe uma variação significativa entre o prêmio da opção por esperar entre os anos de 2003 e 2004, que antecedem o instrumento dos CEPACs, e o período subsequente entre 2005 e 2010. Esse fenômeno é explicado pelo fato de que antes dos CEPACs o aumento do potencial de construção (densidade) também era possível através de Outorga Onerosa, que, similarmente aos CEPACs, permitiam o aumento da densidade de construção até 4,0.

## 5.2 O Valor Crítico de $Z^*$

Utilizando-se as equações (42) e (43), são encontrados os valores críticos médios para a razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção, que podem ser observados na tabela 17.

Lembrando que:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \left( \frac{1}{j_1 - 1} \right) z^{*-j_1} \end{array} \right. \quad (59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z^* = \left( \frac{j_1}{j_1 - 1} \right) \left( \frac{1}{1 - \beta\pi} \right) \end{array} \right. \quad (60)$$

**Tabela 17: Valores Críticos de  $z^*$  por Tipo de Imóvel.**

|                    | Água<br>Espraiada | Faria Lima  | Média Geral | $z < z^*$  |
|--------------------|-------------------|-------------|-------------|------------|
| <b>Apartamento</b> | <b>4,06</b>       | <b>6,45</b> | <b>5,46</b> | <b>25%</b> |
| 2003               | 1,44              | 1,95        | 1,72        | 4%         |
| 2004               | 1,98              | 2,71        | 2,44        | 13%        |
| 2005               | 1,82              | 5,71        | 4,18        | 18%        |
| 2006               | 3,25              | 4,20        | 3,78        | 24%        |
| 2007               | 8,44              | 16,74       | 15,55       | 57%        |
| 2008               | 2,66              | 15,53       | 12,31       | 50%        |
| 2009               | 13,15             | 1,96        | 11,11       | 64%        |
| 2010               | 4,40              | 1,85        | 3,27        | 11%        |
| <b>Casa</b>        | <b>2,61</b>       | <b>4,43</b> | <b>3,74</b> | <b>39%</b> |
| 2003               | 1,49              | 2,56        | 1,95        | 18%        |
| 2004               | 4,03              | 1,55        | 2,57        | 45%        |
| 2005               | 1,58              | 8,26        | 6,46        | 38%        |
| 2006               | 1,64              | 1,83        | 1,80        | 21%        |
| 2007               | 5,33              | 9,99        | 8,24        | 38%        |
| 2008               | 1,74              | 2,13        | 2,11        | 41%        |
| 2009               | 3,21              | 5,23        | 4,70        | 74%        |
| 2010               | 3,71              | 2,86        | 3,26        | 82%        |
| <b>Comercial</b>   | <b>1,26</b>       | <b>3,00</b> | <b>2,62</b> | <b>9%</b>  |
| 2003               | 1,27              | 1,71        | 1,62        | 0%         |
| 2004               | 1,26              | 2,42        | 2,16        | 11%        |
| 2005               | 1,27              | 2,07        | 1,95        | 14%        |
| 2006               | 1,26              | 2,11        | 2,01        | 11%        |
| 2007               | 1,26              | 2,20        | 2,01        | 10%        |
| 2008               | 1,26              | 2,73        | 2,41        | 11%        |
| 2009               | 1,26              | 10,29       | 7,71        | 0%         |
| 2010               | 1,26              | 2,00        | 1,51        | 33%        |
| <b>Média Geral</b> | <b>3,09</b>       | <b>4,85</b> | <b>4,20</b> | <b>29%</b> |

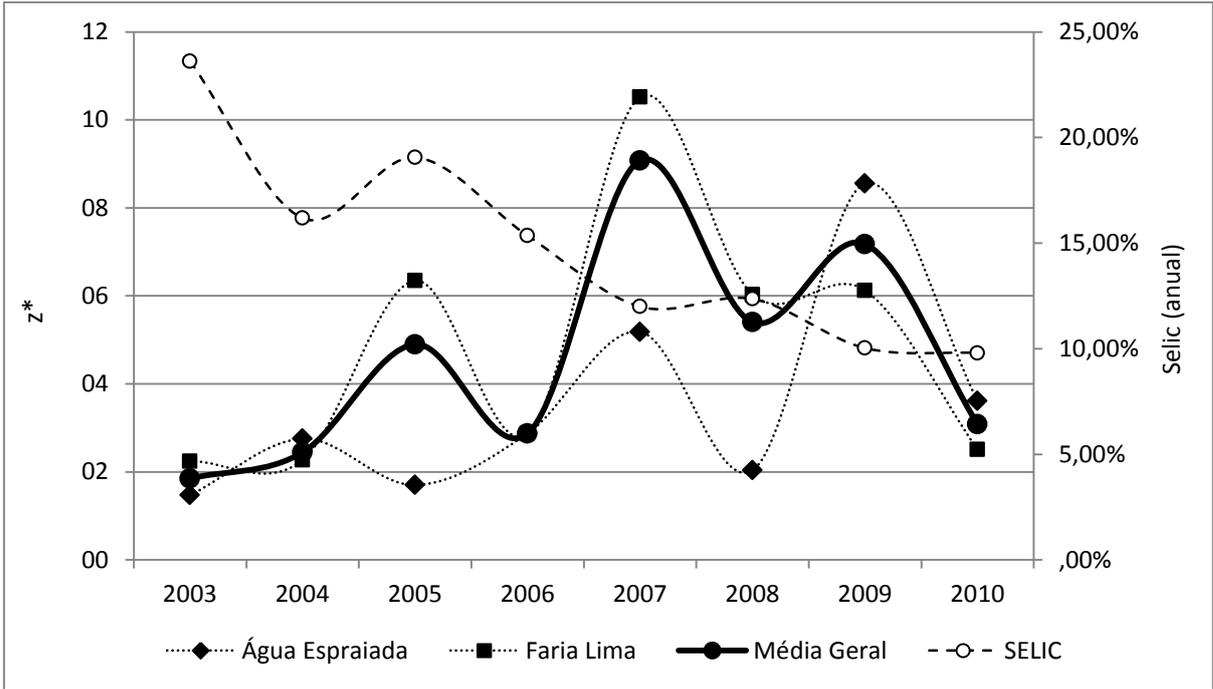
Fonte: elaboração própria.

Os valores críticos das regiões estudadas foram observados antes e depois da inclusão dos CEPACs como instrumentos de financiamento das operações urbanas. Entretanto, não foram encontradas grandes diferenças, pois já era possível a construção de imóveis com o coeficiente máximo de construção mesmo antes do advento dos CEPACs através do pagamento da Outorga Onerosa.

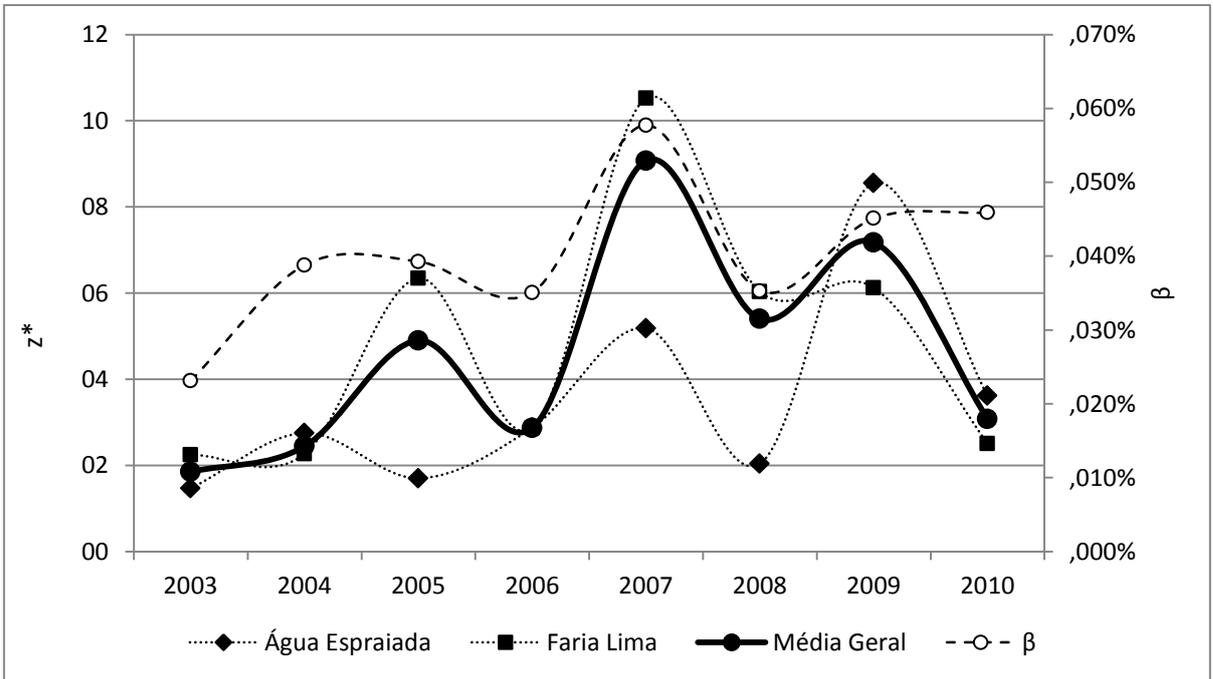
Quanto maior a diferença entre o coeficiente básico e o coeficiente máximo de aproveitamento (nesse caso, o CEPAC causa um intervalo mais longo), maior o valor da opção de se construir em densidades diferentes. Ao decidir postergar o investimento, sobe o valor do  $z^*$  crítico (taxa de retorno entre o preço e o custo de construção). Quanto maior a incerteza, maior o valor da opção. Assim, o prêmio pela opção de se esperar para construir será mais alto, à medida que o investidor decidir postergar a construção.

De acordo com as premissas e o modelo de opções reais apresentado, 29% das propriedades não deveriam ser construídos imediatamente se o investidor, corretamente, escolhesse a opção de esperar para construir. Assim como observado no cálculo do prêmio da opção por esperar, a não observância do momento ótimo de construção é maior para imóveis do tipo casa e em 39% das observações a construção foi realizada antes do momento ótimo ( $z < z^*$ ).

Embora exista uma tendência de crescimento do valor crítico  $z^*$  à medida que a taxa de juros decai ao longo dos anos (correlação entre  $z^*$  e Selic = -0,54), o comportamento da evolução de  $z^*$  depende fortemente da evolução do retorno do terreno vago  $\beta$  por unidade de preço do imóvel (correlação entre  $z^*$  e  $\beta$  = 0,77). O gráfico 21 compara a evolução dos valores críticos  $z^*$  com a taxa Selic ao longo do tempo. Já o gráfico 22 mostra a evolução dos valores críticos  $z^*$  comparados com a evolução do  $\beta$ .



**Gráfico 21: Evolução do Valor Crítico  $z^*$  Comparado com a Evolução da SELIC.**  
 Fonte: elaboração própria.

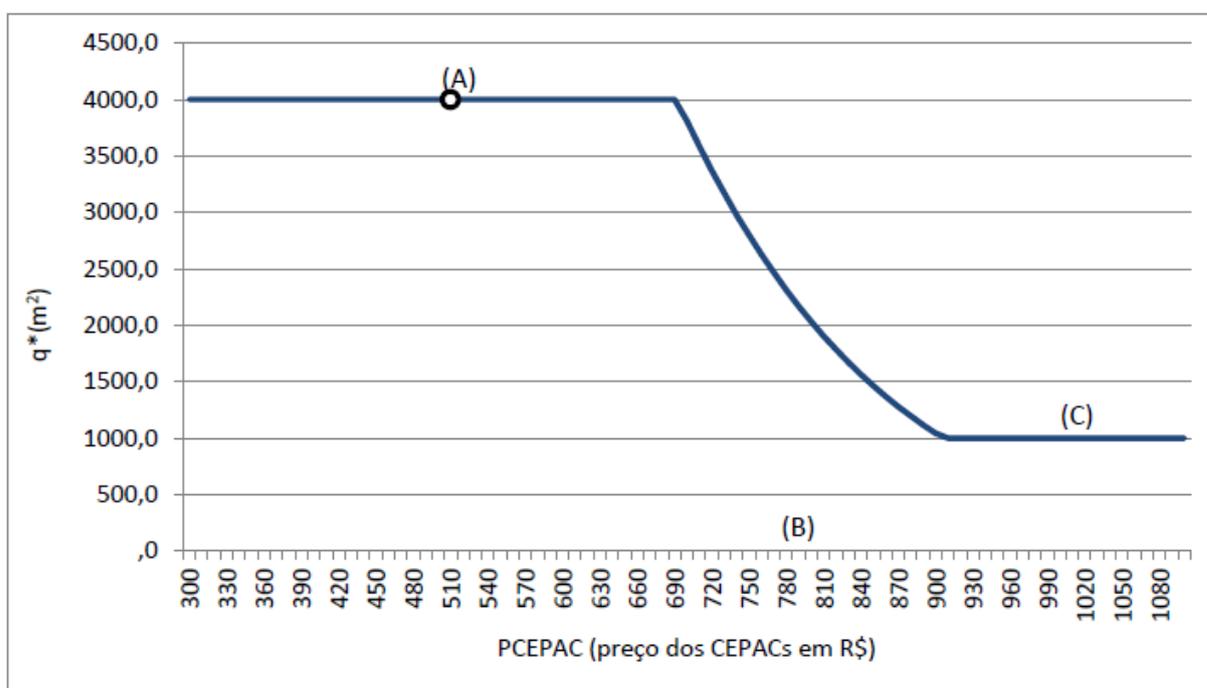


**Gráfico 22: Evolução do Valor Crítico  $z^*$  Comparado com a Evolução do  $\beta$ .**  
 Fonte: elaboração própria.

### 5.3 A Densidade Ótima $q^*$

Inicialmente se analisou a influência do CEPAC na densidade ótima de construção. Ao se utilizar esse instrumento para aumentar o potencial de construção amplia-se também o seu custo total.

A ampliação da densidade de construção é limitada pelo aumento do custo adicional de construção que estabelece um equilíbrio (densidade ótima). Foi realizada uma simulação com um terreno vago de  $1000\text{m}^2$  no perímetro da Operação Urbana Água Espreada no final de 2008, com  $\gamma = 1,09$  (elasticidade do custo por  $\text{m}^2$ ),  $x_1 = 825$  (custo médio de construção por  $\text{m}^2$ ),  $\Phi = 1,0024$  (elasticidade do preço por  $\text{m}^2$ ),  $\varepsilon = 2.532$  (demais parâmetros da equação de regressão do preço),  $\theta = 1$  (equivalência de 1 CEPAC em  $\text{m}^2$ ) e preço do CEPAC (PCEPAC) variando entre 300 e 1100.



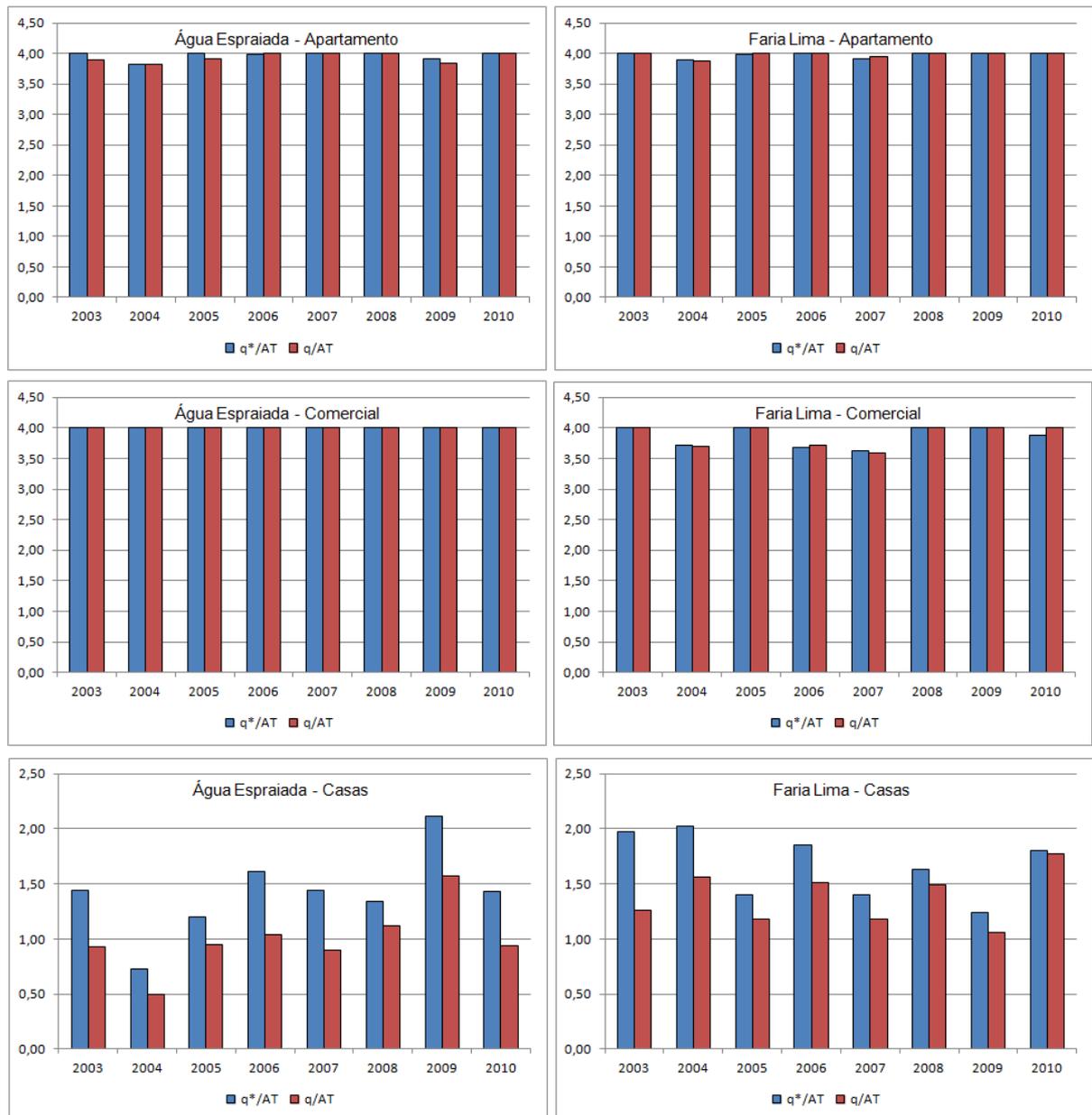
**Gráfico 23: Densidade Ótima de Construção  $q^*$  (em  $\text{m}^2$  de Área Construída) em Relação ao Preço do CEPAC.**

Fonte: elaboração própria.

Em dezembro de 2008 o custo médio de construção estava em R\$  $825,00/\text{m}^2$  e o valor do CEPAC em R\$  $535,00$ , fazendo com que a densidade ótima estivesse no limite de 4,0 vezes o tamanho do terreno, conforme assinalado no gráfico 23. Caso o valor do CEPAC atingisse cerca de R\$  $695,00$ , a densidade ótima de construção passaria a ser menor do que 4,0 e chegaria a 1,0, quando o preço do CEPAC atingisse R\$  $910,00$ . A partir desse valor não faz

mais sentido o uso do CEPAC para aumentar o potencial de construção, pois o custo adicional não compensa os ganhos, já que amplia a densidade de construção acima do limite básico da lei de zoneamento.

Compararam-se os resultados teóricos da densidade ótima (área construída ótima,  $q^*$ , dividida pela área de terreno, AT) para os diferentes tipos de imóveis em cada uma das Operações Urbanas e os resultados comparativos encontram-se plotados no gráfico 24.



**Gráfico 24: Comparação entre a Densidade Observada ( $q/AT$ ) e a Densidade Ótima ( $q^*/AT$ ) Prevista pelo Modelo de Opções Reais.**

Fonte: elaboração própria.

Nota-se uma coerência entre os resultados teóricos de otimização da densidade de construção e os valores observados nos dados analisados, para os imóveis localizados nos perímetros das Operações Urbanas Faria Lima e Água Espraiada.

Os edifícios comerciais e apartamentos, em ambas as operações urbanas, tiveram quase sempre o tamanho da construção limitado pela densidade máxima permitida (4,0 vezes o tamanho do terreno), fato este não observado nas casas cuja densidade média encontra-se entre 0,5 e 1,8. Essa possibilidade está prevista pelo modelo, pois à medida que o tamanho do terreno cresce a densidade ótima de construção apresenta dois patamares determinados pelas leis de zoneamento, conforme o gráfico 23.

Considerando-se as mesmas condições da simulação anterior, isto é, um terreno situado dentro do perímetro da Operação Urbana Água Espraiada, no final de 2008, com  $\gamma = 1,09$  (elasticidade do custo por  $m^2$ ),  $x_1 = 825$  (custo médio de construção por  $m^2$ ),  $\Phi = 1,0024$  (elasticidade do preço por  $m^2$ ),  $\theta = 1$  (equivalência de 1 CEPAC em  $m^2$ ) e preço dos CEPACs (PCEPAC) = R\$ 535,00, variou-se o tamanho do terreno de  $10 m^2$  para  $1.200 m^2$ , observando-se o valor de  $q^*$  previsto pelas equações 56, 57 e 58.

Retomando o modelo deste trabalho, proposto na seção 3.5, resultam três casos possíveis:

a)  $q_o \leq \delta_{bas}$

Não existe incremento de potencial de construção pela utilização de CEPACs e a densidade ótima de construção resume-se ao resultado já conhecido e desenvolvido por Quigg (1993):

$$q_o = \left( \frac{\gamma x_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon - \gamma}} \quad (61)$$

b)  $\delta_{bas} < q_o \leq \delta_{max}$

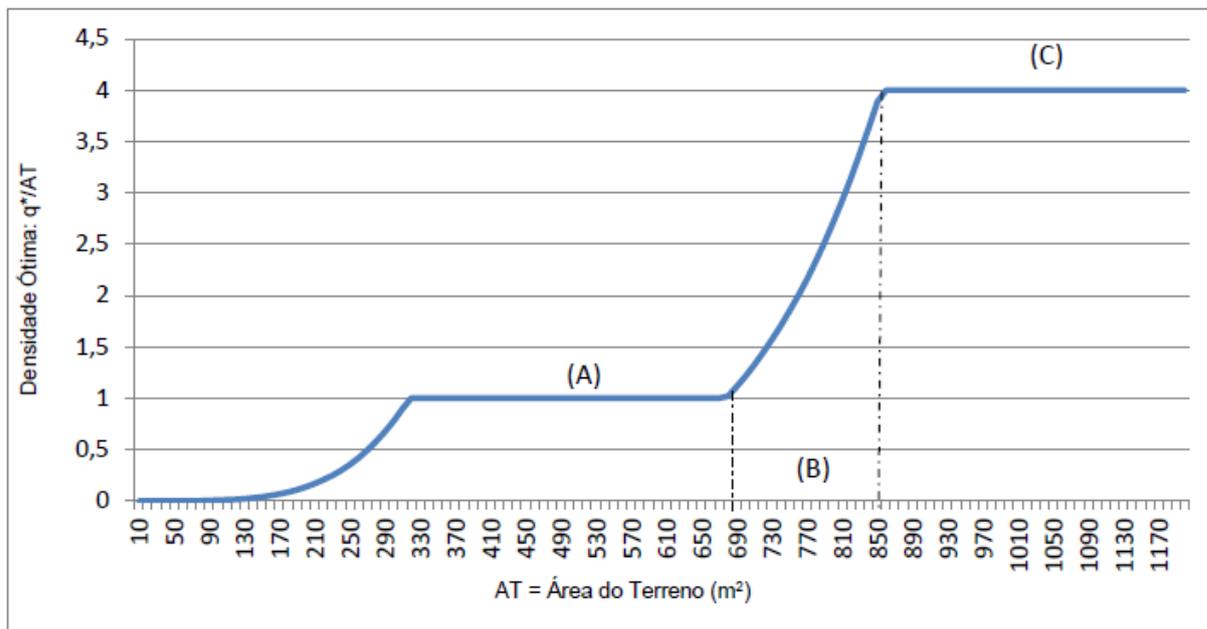
A expressão para  $q_o$  não apresenta uma forma fechada, sendo possível apenas a resolução através de cálculo numérico:

$$\varepsilon q_o^{\varepsilon - 1} \varepsilon - \gamma q_o^{\gamma - 1} x_1 - \theta \cdot PCepac = 0 \quad (62)$$

c)  $q_o \geq \delta_{max}$

A lei de zoneamento limita a construção de tal forma que:

$$q_o = \delta_{max} \quad (63)$$



**Gráfico 25: Comportamento da Densidade Ótima  $q^*/AT$  (Área Ótima Construída/Área do Terreno) em Relação à Área do Terreno.**

Fonte: elaboração própria.

No gráfico 25, o primeiro patamar com  $q^*/AT = 1,0$  ocorre quando a área do terreno encontra-se entre 320 e 670 m<sup>2</sup>. Nesse intervalo o acréscimo da densidade de construção pela utilização de instrumentos como o CEPAC não é economicamente viável e fica, portanto, limitado pela densidade básica definida pela lei de zoneamento da região. Entre 670 e 850 m<sup>2</sup> a densidade ótima de construção cresce continuamente através da utilização dos CEPACs, apesar do incremento no custo de construção provocado por esse instrumento. A partir de terrenos com mais de 850 m<sup>2</sup>, a densidade ótima de construção fica limitada em  $q^*/AT = 4,0$ . As Operações Urbanas limitam a densidade máxima de construção a esse patamar, não sendo possível a utilização dos CEPACs para aumentar o potencial de construção além dele.

Portanto, através do modelo de opções reais formulado, foi possível responder as questões desta pesquisa e confirmar as hipóteses do modelo:

Questão 1: Há alguma diferença relativa entre o valor do terreno vago observado e seu valor calculado pelo modelo de opções reais?

Resposta: Há um prêmio pela opção de se esperar para construir. O valor do terreno vago baseado no modelo de opções reais excede seu valor intrínseco em todos os cenários. O maior prêmio obtido em média foi para os imóveis comerciais. Já o menor prêmio foi para casas. Este fato era esperado, pois as construções de casas são, em sua maior parte, executadas por

particulares antes do momento ótimo e com densidade subótima, sem o uso de instrumentos que aumentem o potencial construtivo do terreno.

Questão 2: Há alguma diferença entre a elasticidade do custo de construção e a elasticidade do preço do imóvel?

Resposta: Sim, a elasticidade do custo de construção é maior que a elasticidade do preço do imóvel. Ao serem utilizadas regressões para o preço dos imóveis e os parâmetros para o custo de construção, foi possível corroborar Williams (1991), Titman (1985) e Medeiros (2003), obtendo-se uma função custo é crescente e convexa, implicando  $\gamma > 1$ . Na regressão do preço obteve-se o parâmetro  $\phi = 1,0024$  para imóveis residenciais e  $\phi = 0,5291$  para comerciais. No que diz respeito a todas as localidades os valores das elasticidades de custo foram superiores a 1,  $\gamma > 1$ . Assim, conforme o número de andares do prédio sobe, o custo do trabalho por andar aumenta e as fundações devem ser mais resistentes. Além disto, corrobora-se Quigg, pois o parâmetro de elasticidade de custo excede o parâmetro da elasticidade do preço ( $\gamma > \phi$ ), permitindo assim retornos positivos ou negativos. De maneira distinta de Medeiros (2003) e Quigg (1993), o fator de escala da função custo de construção não foi único, mas específico para cada setor em sua respectiva operação urbana.

Questão 3: Qual o impacto na razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção, ao decidir postergar o investimento?

Resposta: Quanto maior a diferença entre o coeficiente básico de aproveitamento do terreno e seu coeficiente máximo (e o CEPAC causa um intervalo maior), maior o valor da opção de se construir em densidades diferentes, e, portanto, maior o valor da razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção. Em relação aos valores críticos antes e depois da inclusão dos CEPACs, não foram encontradas grandes diferenças, pois já era possível a construção de imóveis com o coeficiente máximo de aproveitamento, através da outorga onerosa.

Questão 4: Qual a influência dos CEPACs na densidade ótima de construção?

Resposta: Comparou-se a densidade observada e a densidade ótima, prevista pelo modelo de opções, bem como a densidade ótima em relação à área do terreno para verificar que, ao se utilizar os CEPACs como instrumento para aumentar o potencial de construção, amplia-se também o custo de construção do imóvel. Entretanto, a ampliação da densidade é limitada pelo aumento do custo adicional de construção.

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisadas a escolha do momento ótimo para a construção de uma propriedade e a escolha da densidade ótima, isto é, o número de unidades ótimas a serem construídas em um terreno, sendo calculado um prêmio por se esperar para construir. Para determinar essas decisões, foi utilizado como base o modelo de Williams (1991), que parte da teoria de opções reais, comparando a oportunidade de investimento no mercado imobiliário a uma opção financeira. Nesse modelo, o detentor de um terreno vago, sujeito a restrições legais, determina tanto o tempo ótimo para iniciar a construção quanto sua densidade ótima.

Quigg (1993) estende o modelo de Williams (1991), ao verificar uma diferença de valores entre o preço observado do imóvel e seu preço dado pelo modelo de opções reais. A autora verifica um prêmio por esperar para construir, tanto nos casos de imóveis residenciais quanto comerciais.

Este trabalho possui como contribuição teórica a extensão dos modelos de Williams (1991) e Quigg (1993), agregando-se um instrumento financeiro inovador: os CEPACs. Através dele, seu proprietário pode construir acima do permitido pela lei de zoneamento, uma vez obedecidos os volumes de estoque de terreno em cada operação urbana.

Uma análise empírica, para o mercado imobiliário tanto residencial quanto comercial na cidade de São Paulo, foi realizada para verificar os resultados teóricos obtidos. Assim como em Quigg (1993), corroborou-se o modelo de opções reais, sendo obtido um prêmio por se esperar para construir. O valor do terreno vago baseado no modelo de opções reais também excede o valor intrínseco em todos os casos.

Também foi empiricamente verificado o impacto dos CEPACs no custo de construção, na densidade ótima e no tempo ótimo de construção. Eles aumentam o custo de construção, por representarem, ao proprietário, um desembolso adicional, para obter o direito de construir acima do permitido pela lei de zoneamento. Além disso, esse instrumento incrementa a densidade ótima da propriedade ao seu nível máximo. Quanto ao tempo de construção, uma vez que o CEPAC aumenta o grau de escolha do potencial construtivo, há um crescimento da incerteza, o que valoriza manter o terreno vago.

Embora exista uma tendência de crescimento do valor crítico  $z^*$ , à medida que a taxa de juros decai ao longo dos anos, o comportamento da evolução de  $z^*$  depende fortemente da evolução do retorno do terreno vago  $\beta$  por unidade de preço do imóvel.

Pode-se comprovar que as extensões teóricas realizadas aqui possuem impactos significativos nos resultados do modelo. A introdução dos CEPACs, alterando o custo de construção, a densidade ótima, o momento ótimo de iniciar a construção, alterou a dinâmica das operações urbanas.

Como limitação a este trabalho, ressalta-se a falta de um banco de dados padronizado, sendo utilizadas várias fontes (Embraesp, Prefeitura, Economática, ZAP, Sindepark e Sinduscon). Falta, no Brasil, uma fonte de dados segura e padronizada. Os dados existentes atualmente são o resultado de iniciativas isoladas de sindicatos e associações do mercado imobiliário.

Como sugestão para pesquisas futuras, observa-se que o mercado secundário dos CEPACs, ainda que existente na BOVESPA, é muito incipiente de tal forma que se considerou o preço dos CEPACs como uma variável determinística. Essa premissa foi utilizada, mostrando-se coerente com os dados de mercado observados. À medida que houver maior desenvolvimento desse mercado secundário, será possível elaborar um modelo em que o preço do CEPAC siga o movimento geométrico browniano, considerando-o como uma variável estocástica. Dessa forma, a variável preço do CEPAC deverá ser tratada como não determinística, resultando em uma derivação do Lema de Itô para três variáveis estocásticas (preço do imóvel, custo de construção e preço do CEPAC), o que implicará uma equação diferencial similar àquelas encontradas no modelo de opções asiáticas.

Outra sugestão é expandir a avaliação para áreas fora das operações urbanas, a fim de comparar os comportamentos da razão entre o fluxo de caixa e o custo de construção ( $z^*$ ), bem como da densidade ( $q$ ) das áreas com e sem a Outorga Onerosa, mas onde não haja a possibilidade de aumentar o potencial construtivo através dos CEPACs.

O valor de  $\beta$ , que representa o ganho com aluguel por unidade de preço do edifício, foi muito importante para a determinação de  $z^*$ . Este trabalho considerou um valor da receita média por vaga de estacionamento, independentemente do bairro. Um estudo futuro deveria considerar o valor médio da receita por vaga conforme o bairro.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. 1986. Property taxes and the timing of urban development. *Regional Science and Urban Economics* 16, 483-492.
- ARNOTT, R.; LEWIS, F. 1979. The transition of land to urban use, *Journal of Political Economy* 87:11, 161-169.
- BLACK, F.; MYRON, S. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3), 637-654.
- BRENNAN, M; SCHWARTZ, E. 1990. Evaluating natural resource investment. *Journal of Finance* 45, 709-730.
- CAPOZZA, D.; SICK, G. 1988. The risk structure of land markets. *Journal of Urban Economics* 35, 297-319.
- CAPOZZA, D.; YUMMING LI. 1994. The intensity and timing of investment: the case of land. *American Economic Review* 84, 889-904.
- CASE, K. E.; SHILLER, R. J. 1989. The efficiency of the market for a single-family homes. *American Economic Review* 79, 125-137.
- CAULEY, S. D.; PAVLOV, A. D. 2002. Rational delays: the case of real estate. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 24(1/2), 143-165.
- COLWELL, P. F. 1992. Semiparametric estimates of the marginal price of floorspace (comment). *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 151-172.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. 1979. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, September 7, 229-263.
- COX, J. C.; RUBINSTEIN, M. 1985. Options markets (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.).
- CLAPP, J. M. 2004. A semiparametric method for estimating local house price indices. *Real Estate Economics*, 32(1), 127-160.
- CLAPP, J. M.; GIACCOTTO, C. 2002. Evaluating house price forecasts. *Journal of Real Estate Research*, 24(1), 1-26.
- CLARKE, H.; REED, W. 1988. A stochastic analysis of land development timing and property valuation. *Regional Science and Urban Economics*, 18, 357-381.
- EMURB. 2008. Prospecto das Operações Urbanas. In: [www.prefeitura.sp.gov.br/emurb.htm](http://www.prefeitura.sp.gov.br/emurb.htm). Último acesso: 07/2010.
- FÁVERO, L. P. 2007. Mercado imobiliário: técnicas de precificação e comercialização. *Saint Paul Editora*, 2ª. Edição.

FIPE. 2011. Índice FipeZap de preços de imóveis anunciados. *Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas*. In: [www.fipe.org.br](http://www.fipe.org.br). Último acesso: 12/12/2011.

FISCHER, S. 1978. Call option pricing when the exercise price is uncertain, and the valuation of bonds. *Journal of Finance* 33, 169-176.

FREW, J.; JUD, D. G. 2003. Estimating the value of apartment buildings. *Journal of Real Estate Research*, 25(1), 77-86.

GRENADIER, S. R. 1995. Flexibility and Tenant Mix in Real Estate Projects, *Journal of Urban Economics* 38, 357-378.

GRENADIER, S. R. 1996. The strategic exercise of options: development cascades and overbuilding in real estate markets. *The Journal of Finance*, 51(5), 1653-1679.

GUIRGUIS, H. S.; GIANNIKOS, C. I.; ANDERSON, R. I. 2005. The US housing market: asset pricing forecasts using time varying coefficients. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 30(1), 33-53.

GUJARATI, D. N. 2000. *Econometria*. 3.ed. São Paulo: Makron Books.

HAIR, J. R. 2005. *Análise multivariada de dados*. 5.ed. Porto Alegre: Bookman.

HOLLAND, J. H. 1975. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press.

HUI, E.; FUNG, H. 2009. Real Estate development as real options. *Construction Management and Economics*, 27:3, 221-227.

HULL, J. C. 2008. *Futures, options and other derivatives*, Prentice Hall.

JOU, J.; TAN LEE, J. 2007. Do tighter restrictions on density retard development? *Journal of Real Estate and Financial Economics*, 34, 225-232.

JUD, D. G.; WINKLER, D. T. 2002. The dynamics of metropolitan housing prices. *Journal of Real Estate Research*, 23(1/2), 29-46.

MARGRABE, W. 1978. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance* 33, 177-186.

SCHWARTZ, E.; GIBSON, R. 1990. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims, *Journal of Finance* 45, 959-976.

MCDONALD, R. L.; SIEGEL, D. R. 1985. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down, *International Economic Review* 26, 331-349.

MAJD, S.; PINDYCK, R. S. 1987. Time to build, option value, and investment decisions, *Journal of Financial Economics* 18, 7-27. Marshall Valuation Service, 1986, Marshall and Swift, Los Angeles.

- MEDEIROS, P. Y. 2003. Applications of real options in the real estate market focusing the city of Rio de Janeiro, *Revista Brasileira de Finanças* 1, 45-87.
- MERTON, R. C. 1973. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, Spring 4, 141-183.
- MILNE, F.; TURNBULL, S. 1991. A simple approach to interest rate option pricing, *Review of Financial Studies* 4, 87-120.
- MONTANDON, D. T.; SOUZA, F. F. 2007. Land readjustment e operações urbanas consorciadas, *Editora Romano Guerra*, São Paulo.
- MORCK, R.; SCHWARTZ, E.; STANGELAND, D. 1989. The valuation of forestry resources under stochastic prices and inventories, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 473-488.
- MYERS, S. C. 1977. Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, vol 5, 147-175.
- NEFTI, S. N. 1996. An introduction to the mathematics of financial derivatives, *Academic Press*.
- OLIVEIRA, I. 2001. Estatuto da Cidade: para compreender. *Instituto Brasileiro de Administração Municipal*.
- PADDOCK, J.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. 1988. Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases, *Quarterly Journal of Economics* 102, 479-508.
- PAXSON, D. A. 2005. Multiple state property options. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 30(4), 341-368.
- PMSP – Prefeitura do Município de São Paulo. 2007. Prospecto de Registro da Operação Urbana Consorciada Água Espreada, São Paulo. Disponível em [http://portal.prefeitura.sp.gov.br/empresas\\_autarquias/emurb/cepac](http://portal.prefeitura.sp.gov.br/empresas_autarquias/emurb/cepac). Último acesso em: 12/12/2011.
- PMSP – Prefeitura do Município de São Paulo. 2007. Prospecto de Registro da Operação Urbana Consorciada Faria Lima, São Paulo. Disponível em [http://portal.prefeitura.sp.gov.br/empresas\\_autarquias/emurb/cepac](http://portal.prefeitura.sp.gov.br/empresas_autarquias/emurb/cepac). Último acesso em: 12/12/2011.
- QUIGG, L. 1993. Empirical testing of real option pricing models. *The Journal of Finance* 48:2, 621-640.
- RENDLEMAN, R. J.; BARTTER, B. J. 1979. Two-state option pricing. *Journal of Finance*, December 34, 117-134.
- RIBEIRO, F. S. M. 2004. Avaliação de projetos de incorporação imobiliária sob incerteza – uma abordagem por opções reais. Dissertação de Mestrado não publicada, *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ROCHA, K.; SALLES, L.; ALCARAZ, F.; SARDINHA, J. A.; TEIXEIRA, J. P. 2007. Real estate and real options – a case study. *Emerging Markets Review*, 8(1), 67-79.

ROSEN, S. 1974. Hedonic prices and implicit markets: Product differentiation in pure competition, *Journal of Political Economy* 82, 34-55.

RUBINSTEIN, M. 1976. The valuation of uncertain streams and the pricing of options, *Bell Journal of Economics* 7, 407-425.

SANDRONI, P. 2008. O CEPAC como instrumento de captação de mais-valias urbanas e financiamento de grandes projetos urbanos, GVPesquisa, *Fundação Getúlio Vargas*, São Paulo, relatório 27.

SANTORO, P.; CYMBALISTA, R. 2004. Introdução à “gestão social da valorização da terra”. In: SANTORO, P. (org.). *Gestão social da valorização da terra*. São Paulo: Instituto Pólis, 80p.

SCHNIDMAN, F. 1988. Land readjustment: an alternative to development exaction. In *Private Supply of Public Services*, R. Alterman Editor, 73-87, New York.

SECRETARIA MUNICIPAL DE FINANÇAS. 2011. Imposto predial e territorial urbano: leis e decretos. *Prefeitura Municipal de São Paulo*.

SHOUP, D. 1970. The optimal timing of urban land development. *Papers in Regional Science* 25 (1), 33-44.

SORENSEN, A. 1999. Land readjustment, urban planning and urban sprawl in the Tokyo metropolitan area. *Urban Studies*, 36 (13), 2333-2360.

STULTZ, R. 1982. Options on the minimum or the maximum of two risky assets: analysis and applications. *Journal of Financial Economics* 10, 161-185.

TITMAN, S. 1985. Urban land prices under uncertainty, *American Economic Review* 75, 505-514.

TRIANANTIS, A. J.; HODDER, J. E. 1990. Valuing flexibility as a complex option, *Journal of Finance* 45, 549-566.

TRIGEORGIS, L. 2004. Real options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions. *MIT Press Paperback Edition*.

WANG, K.; ZHOU, Y. 2002. Equilibrium real options exercise strategies with multiple players: the case of real estate markets. *Anais da Asia Conference on Efficiency and Productivity Growth*, Taipei, Taiwan, 5.

WILLIAMS, J. T. 1991a. Real estate development as an option, *Journal of Real Estate Finance and Economics* 4, 191-208.

WILLIAMS, J. T. 1991b. Equilibrium and options on real assets, Working paper, *University of British Columbia*.

WILLIAMS, J. T. 1997. Redevelopment of real assets, *Real Estate Economics*, 25, 387-407.

WILDERODE, D. 1997. Operações Interligadas: engessando a perna de pau. In ROLNIK, R. e CYMBALISTA, R. (orgs.) *Instrumentos urbanísticos contra a exclusão social*. São Paulo: Pólis, p.43-55.

WILMOTT, P.; DEWYNNE, J. 1995. The mathematics of financial derivatives, *Cambridge University Press*.

YAVAS, A.; SIRMANS, C.F. 2005. Real options: experimental evidence. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 31(1), 27-52.

## ANEXOS

### Processo de determinação da taxa média de retorno composto

A literatura não é uniforme quanto ao melhor modelo para a determinação da taxa média de retorno composto ( $\alpha_i$  ou *drift rate*) de uma variável aleatória que se comporta segundo um movimento geométrico browniano. Foram feitas simulações de Monte Carlo para verificar qual o melhor modelo para a estimação da taxa média de retorno composto.

Um GBM (movimento geométrico browniano) é regido por uma equação do tipo:

$$\frac{dy}{y} = \alpha_y dt + \sigma_y dz_y$$

Onde  $dz_y =$  incremento de Wiener  $= \varepsilon \cdot dt^{\frac{1}{2}}$ , onde  $\varepsilon$  é uma distribuição normal.

Definindo-se a função  $G = \ln(y)$ , temos que:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{-1}{y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Aplicando-se o lema de Ito em G, temos:

$$dG = \left(\alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2}\right) dt + \sigma_y dz_y$$

Como  $\alpha_y$  e  $\sigma_y$  são constantes, a equação acima mostra que  $G = \ln(y)$  segue um movimento de Wiener generalizado, com retorno composto constante igual a  $\alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2}$  e variância constante igual a  $\sigma_y^2$ .

A evolução de G entre o intervalo de tempo 0 e T apresenta, portanto, uma distribuição normal com média  $(\alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2})T$  e variância  $\sigma_y^2 T$ :

$$G_T - G_0 \sim \mathcal{N}\left[\left(\alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2}\right)T, \sigma_y \sqrt{T}\right]$$

Ou seja:

$$G_T \sim \mathcal{N} \left[ G_0 + \left( \alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2} \right) T, \sigma_y \sqrt{T} \right]$$

A partir dessa última equação, conclui-se que  $\ln(y_t)$  segue uma distribuição normal de média  $m = \ln(y_0) + \left( \alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2} \right) T$  e desvio padrão  $s = \sigma_y \sqrt{T}$ , e que, portanto, o processo estocástico  $y$  segue uma distribuição lognormal.

Os preços por metro quadrado dos imóveis e os custos por metro quadrado de construção são representados por processos estocásticos similares ao  $y$  acima. Dada um série de amostras do processo estocástico  $y$ , deseja-se estimar os valores de  $\alpha_y$  e  $\sigma_y^2$ .

Se  $\mu$  é definido com a média de valores consecutivos de  $\ln(y_T) - \ln(y_{T-1}) = \ln\left(\frac{y_T}{y_{T-1}}\right)$ , segue que  $\mu = \alpha_y - \frac{\sigma_y^2}{2}$ . Logo, isolando-se o  $\alpha_y$  na equação anterior, é possível estimá-lo como  $\alpha_y = \mu + \frac{\sigma_y^2}{2}$ .

A estimativa da média  $\mu$  é calculada como  $\mu_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(y_i) - \ln(y_{i-1})$ , e resulta, por simplificação, em  $\mu_a = \frac{1}{N} [\ln(y_N) - \ln(y_0)]$ . Em resumo, todas as informações intermediárias estariam armazenadas no valor de  $y_N$  e os valores intermediários não são importantes para o cálculo da estimativa da média  $\mu$ .

Por outro lado, se a média  $\mu$  é calculada como  $\mu_b = \frac{1}{N/2} \sum_{i=1}^{N/2} \ln(y_{2i}) - \ln(y_{2i-1})$ , então os termos da somatória não se anulam e todos os valores intermediários são utilizados para se compor a estimativa da média  $\mu$ . Nesse caso, entretanto, metade da informação existente na série é descartada à medida que apenas metade dos “saltos” de  $y$ s consecutivos é considerada para a determinação da estimativa de  $\mu$ .

Utilizou-se uma simulação de Monte Carlo para avaliar qual dos dois métodos ( $\mu_a$  ou  $\mu_b$ ) é o mais adequado para a estimação de  $\mu$  e, por consequência, de  $\alpha_y$ .

A simulação foi construída, considerando-se dois cenários:

Cenário 1: processo estocástico GBM, contendo 200 passos de  $dt = 1$ ,  $\alpha = 0,02$  e  $\sigma = 0,005$

| <b>Monte Carlo</b> | <b><math>\alpha_a</math></b> | <b><math>\alpha_b</math></b> | <b><math>\sigma</math></b> |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| Mean               | 1,9993%                      | 1,9970%                      | 0,50%                      |
| Standard error     | 1,07E-05                     | 1,55E-05                     | 7,56E-06                   |
| Median             | 2,00E-02                     | 2,00E-02                     | 5,00E-03                   |
| Standard deviation | 3,37E-04                     | 4,91E-04                     | 2,39E-04                   |
| Variance           | 1,14E-07                     | 2,41E-07                     | 5,72E-08                   |
| Skewness           | -0,16                        | 0,00                         | -0,07                      |
| Kurtosis           | 3,00                         | 3,16                         | 3,12                       |

Cenário 1.2: processo estocástico GBM, contendo 42 passos de  $dt = 1$ ,  $\alpha = 0,02$  e  $\sigma = 0,005$

| <b>Montecarlo</b>  | <b><math>\alpha_a</math></b> | <b><math>\alpha_b</math></b> | <b><math>\sigma</math></b> |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| Mean               | 1,9995%                      | 1,9999%                      | 0,20%                      |
| Standard error     | 9,80E-06                     | 1,36E-05                     | 6,96E-06                   |
| Median             | 2,00E-02                     | 2,00E-02                     | 1,98E-03                   |
| Standard deviation | 3,10E-04                     | 4,32E-04                     | 2,20E-04                   |
| Variance           | 9,60E-08                     | 1,86E-07                     | 4,84E-08                   |
| Skewness           | -0,03                        | -0,08                        | 0,21                       |
| Kurtosis           | 2,68                         | 3,11                         | 3,31                       |

Cenário 2: processo estocástico GBM, contendo 200 passos de  $dt = 1$ ,  $\alpha = 0,02$  e  $\sigma = 0,03$

| <b>Montecarlo</b>  | <b><math>\alpha_a</math></b> | <b><math>\alpha_b</math></b> | <b><math>\sigma</math></b> |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| Mean               | 2,0011%                      | 2,0062%                      | 3,00%                      |
| Standard error     | 6,40E-05                     | 9,01E-05                     | 4,63E-05                   |
| Median             | 2,01E-02                     | 2,01E-02                     | 3,00E-02                   |
| Standard deviation | 2,02E-03                     | 2,85E-03                     | 1,46E-03                   |
| Variance           | 4,09E-06                     | 8,12E-06                     | 2,14E-06                   |
| Skewness           | -0,11                        | -0,12                        | 0,02                       |
| Kurtosis           | 2,95                         | 3,04                         | 2,80                       |

Cenário 2.2: processo estocástico GBM, contendo 42 passos de  $dt = 1$ ,  $\alpha = 0,02$  e  $\sigma = 0,03$

| <b>Montecarlo</b>  | <b><math>\alpha_a</math></b> | <b><math>\alpha_b</math></b> | <b><math>\sigma</math></b> |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| Mean               | 2,0009%                      | 1,9481%                      | 2,97%                      |
| Standard error     | 1,50E-04                     | 2,04E-04                     | 1,07E-04                   |
| Median             | 1,97E-02                     | 1,97E-02                     | 2,97E-02                   |
| Standard deviation | 4,73E-03                     | 6,46E-03                     | 3,37E-03                   |
| Variance           | 2,24E-05                     | 4,17E-05                     | 1,14E-05                   |
| Skewness           | 0,17                         | -0,04                        | 0,08                       |
| Kurtosis           | 2,78                         | 2,80                         | 2,95                       |

Os quatro cenários foram simulados com mil ciclos e em todos os resultados a estimativa  $\mu_a$  apresentou menor desvio-padrão e erro-padrão, ratificando a análise de que  $y_t$  contém (armazena) toda a informação da série e que o método de estimação  $\mu_b$  despreza metade das informações, o que poderia parecer contra-intuitivo.

No movimento geométrico browniano, apenas os coeficiente da variação percentual do fluxo de caixa são constantes. Esses flutuam aleatoriamente ao redor de uma tendência exponencial. A primeira diferença do logaritmo natural das séries foi retirada, para realizar as estimativas, com o objetivo de serem observadas as expectativas das taxas de crescimento mensal dos preços dos imóveis e suas volatilidades. Logo, considera-se a diferença do logaritmo natural das séries, exceto a primeira diferença. Tanto o fluxo de caixa quanto o custo de construção foram apresentados em séries mensais.

Para determinação da volatilidade, calculou-se primeiramente a variação do logaritmo entre períodos:

$$\mu_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

O desvio-padrão considerado para a volatilidade do fluxo de caixa é o estimador não viesado da variância, corrigido pelo fator  $n/(n-1)$ , conforme a fórmula seguinte:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\mu_k - \bar{\mu})^2}$$

$$\text{Onde } \bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum \mu_i$$

$$s = \sigma \sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma} = s / \sqrt{T}$$

onde  $\hat{\sigma}$  é a estimativa da volatilidade de um ativo que segue o movimento geométrico browniano. A determinação da taxa contínua de retorno:

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

Isolando-se x:

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

$$x \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right)$$

## Desenvolvimentos Matemáticos

Da equação (10) para a (11):

Aplicando-se o Lema de Itô em  $dx = adt + bdz$  (equação 8):

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Considerando-se que  $v = \mu - \lambda\sigma$  (equação 9), então:

$$dx_2 = x_2 v_2 dt + x_2 \sigma dz \text{ onde } a = x_2 v_2 \text{ e } b = x_2 \sigma$$

Aplicando-se o Lema de Itô, desta vez, na equação (10), que é  $dP + qx_2 = iP$ :

$$dP \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} x_2 v_2 + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} x_2^2 \sigma^2 \right) + qx_2 = iP$$

$$x_2 v_2 P' + \frac{1}{2} x_2^2 \sigma^2 P'' + qx_2 - iP = 0$$

Resultando na equação (11) acima.

Equação (13):

$$P(x_2) \rightarrow \infty \leftrightarrow x_2 \rightarrow \infty$$

Para evitar que  $x_2 \rightarrow \infty$ , Williams (1991) impõe uma constante limitante  $\xi$ , chamada de multiplicador da renda, isto é, o valor que multiplica o fluxo de caixa  $x_2$ .

Da equação (14) para a (15):

$$G(x_1, x_2) \text{ onde } dx_1 = x_1 v_1 dt + x_1 \sigma_1 dz_1 \text{ e } dx_2 = x_2 v_2 dt + x_2 \sigma_2 dz_2$$

Aplicando-se o Lema de Itô de duas variáveis:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + a_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 x_1} b_1 b_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 x_2} b_1 b_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 x_1} b_2 b_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 x_2} b_2 b_2 \right) dt + \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} b_2 \right) dz$$

Simplificando a equação:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + a_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 x_2} b_1 b_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 \right) dt + \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} b_2 \right) dz$$

E definindo:

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad V_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad V_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \quad V_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 x_2} \quad V_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$$

Partindo-se da equação (14):

$$dV + \beta x_2 - iV = 0$$

Obtém-se a equação (15):

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 V_{11} + \sigma_{12} x_1 x_2 V_{12} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 V_{22} + v_1 x_1 V_1 + v_2 x_2 V_2 - iV + \beta x_2 = 0$$

Equações (16), (17), (18) (condições-limite ou de contorno):

Equação (16): Se  $x_2 = 0$ , então  $V(x_1, 0) = 0$ .

Equações (17) e (18):  $V(x^*) = V(x_1^* x_2^*)$

$$V^I(x) = P(x_2) - q^{*\gamma} x_1^*$$

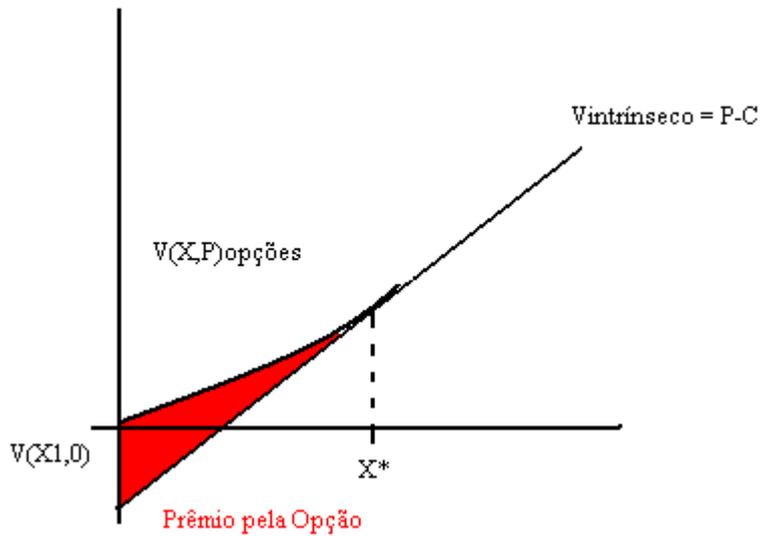
$$V_1(x^*) = \frac{\partial V^I}{\partial x_1} = -q^{*\gamma}$$

$$V_2(x^*) = \frac{\partial V^I}{\partial x_2} = -P'(x_2^*)$$

que são as condições de alisamento.

Para que as equações (45) e (46) tenham um ponto em comum (uma tangencie a outra), as derivadas de  $V$  e de  $V^I$  precisam ser iguais. Ambas as equações estão em função de  $q^*$ . A função que maximiza o lucro é, portanto:

$$\frac{\partial}{\partial q^*} (P(x_2) - q^{*\gamma} x_1^*) = 0 \text{ ou seja, } \frac{\partial P}{\partial q} - \gamma q^{*\gamma-1} x_1^* = 0$$



Equação (20):

A equação do fluxo de caixa é da forma  $P(x_2) = A_1 x_2 + A_0$ .

Derivando-se:

$$P'' = \frac{\partial P'}{\partial x_2} = 0$$

$$P' = A_1$$

Substituindo as derivadas na equação (11):

$$0 + V_2 x_2 A_1 - i(x_2 A_1 + A_0) + q x_2 = 0$$

$$(V_2 A_1 - i A_1 + q) x_2 - i A_0 = 0$$

$$\begin{cases} V_2 A_1 - i A_1 + q = 0 \\ -i A_0 = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = \frac{q}{i - v_2} \text{ e } A_0 = 0$$

$$\text{Se } \frac{1}{i - v_2} = \pi \text{ então } A_1 = \pi q$$

O que resulta na equação linear (20):  $P(x_2) = \pi q x_2$

Williams (1991) considera apenas a solução particular (específica) da equação (11).

Da equação (35) para a (36):

Fazendo-se as mudanças de variável  $z = \frac{P}{X}$  e  $W(z) = V(X, P)/X \rightarrow W(z)x = V(X, P)$ ,

podem-se calcular facilmente as derivadas parciais de  $V$  que aparecem na equação (35) após a aplicação do Lema de Ito em (34). Por exemplo:

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(W(z)x}{\partial x} = \frac{\partial(W(z)x}{\partial x} + W(z) \frac{\partial x}{\partial x}$$

Aplicando-se a derivada do produto:

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} x + W(z)1 = \frac{-W'z}{x} + w$$

Utilizando-se procedimento análogo, obtém-se:

$$V_{xx} = \frac{z^2}{x} W''$$

$$V_p = W'$$

$$V_{px} = V_{xp} = -\frac{zW''}{x}$$

$$V_{pp} = W''/X$$

Substituindo os Vs em (35):

$$\frac{1}{2} \sigma_x^2 x^2 \frac{z^2 w''}{x} + \frac{\sigma_{xp} X P (-z) w'}{x} + \frac{1}{2} \sigma_p^2 P^2 \frac{w''}{x} + v_x X (-w'z + w) + v_p w' - iV + \beta P = 0$$

E reagrupando-se os termos, tem-se:

$$z^2 w'' + \frac{2(v_p - v_x)}{w^2} z w' + \frac{2(v_x - i)}{w^2} w = \frac{-2\beta z}{w^2}$$

Considerando-se  $A_1 = \frac{2(v_p - v_x)}{w^2}$ ,  $A_0 = \frac{2(v_x - i)}{w^2}$  e  $I_0 = \frac{-2\beta z}{w^2}$ , pode-se escrever a equação acima conforme em (36a):

$$z^2 w'' + A_1 z w' + A_2 w = I_0$$

Aplicando-se a solução particular,  $W_p(z) = C_3 z + C_4$ , à equação diferencial (36a), tem-se:

Solução particular  $\rightarrow w'(z) = C_3$  e  $w''(z) = 0$ .

$$z^2 0 + A_1 z C_3 + A_0 (z C_3 + C_4) = \frac{-2\beta z}{w^2}$$

Fatorando-se os termos em z:

$$z \left( A_1 C_3 + A_0 C_3 + \frac{2\beta}{w^2} \right) + A_0 C_4 = 0$$

Como a expressão acima deve ser válida para todos os valores de z, resulta que

$$\begin{cases} A_1 C_3 + A_0 C_3 + \frac{2\beta}{w^2} = 0 \\ A_0 C_4 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação resulta que  $C_4 = 0$ , enquanto que da primeira tem-se:

$$C_3 = \frac{-2\beta w^2}{A_1 + A_0} = \frac{\frac{-2\beta}{w^2}}{\frac{2(v_p - v_x)}{w^2} + \frac{2(v_x - i)}{w^2}} = \frac{-\beta}{v_p - i} = \frac{\beta}{i - v_p}$$

Denominando  $\pi = \frac{1}{i - v_p}$ , tem-se que  $C_3 = \beta\pi$ .

Para a obtenção da solução homogênea da equação diferencial (36a),  $W_h(z) = C_1 z^{j_1} + C_2 z^{j_2}$ , é necessário obter as raízes  $j_1$  e  $j_2$  do seu polinômio característico:

$$j^2 + A_1 j + A_0 = 0$$

A raiz de  $j^2$  é dada, aplicando-se a Fórmula de Báskara:

$$j_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2}$$

Ajustando-se os termos da expressão acima, resulta-se nos valores de  $j_1$  e  $j_2$  descritos em (39).

Equações (23) e (24):

Dado que  $V(x^*) = P(x_2^*) - C(x^*) = \pi q x_2 - q^\gamma x_1$  onde  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  no momento do exercício.

Seja  $p = P/x_1$  onde  $P = \pi q x_2$ . Portanto,  $p(q, y) = \pi q \left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \pi q y$ .

$$W(y) = \frac{V}{x_1} = \pi q \frac{x_2}{x_1} - \frac{q^\gamma x_1}{x_1} = p(q, y) - q^\gamma$$

Define-se  $S(y) = W(y) - [p(q^*, y^*) - q^{*\gamma}]$

Quando  $y = y^*$ , tem-se  $S(y^*) = W(y^*) - [p(q^*, y^*) - q^{*\gamma}] = 0$  (I),

mas  $W(y) = \pi\beta y + \frac{q^{*\gamma}}{\eta-1} \left(\frac{y}{y^*}\right)^\eta$  (II).

Substituindo-se (II) em (I), resulta:

$$\pi\beta y + \frac{q^{*\gamma}}{\eta-1} \left(\frac{y}{y^*}\right)^\eta - (\pi q^* y^* - q^{*\gamma}) = 0$$

Agrupando-se  $\pi y^*$  e  $q^{*\gamma}$ , tem-se:

$$\pi y^*(\beta - q^*) + q^{*\gamma} \left( \frac{1}{\eta-1} + 1 \right) = 0$$

Define-se que  $\frac{\eta}{\eta-1} = \psi$

$$\text{e, que, portanto, } \pi y^*(\beta - q^*) + q^{*\gamma} \psi = 0 \quad (\text{III}).$$

Uma vez que a densidade ótica  $q^*$  maximize o valor do terreno no momento do exercício, tem-se que, quando  $q = q^*$ :

$$\left. \frac{\partial V^I}{\partial q} \right|_{q=q^*} = 0.$$

$$V^I(q) = P(q) - C(q) = \pi q x_2 - q^\gamma x_1$$

No momento  $q = q^*$ :

$$\left. \frac{\partial V^I}{\partial q} \right|_{q=q^*} = \pi x_2 - \gamma q^{*\gamma-1} x_1 = 0$$

Dado que  $x_1 > 0$ , podemos dividir ambos os lados da equação acima por  $x_1$ :

$$\pi \frac{x_2}{x_1} - \gamma q^{*\gamma-1} = 0$$

$$\pi y^* - \gamma q^{*\gamma-1} = 0 \quad (\text{IV})$$

As equações (III) e (IV) formam um sistema de duas equações com duas incógnitas:  $(y^*, q^*)$ .

$$\begin{cases} (\text{III}) \pi y^*(\beta - q^*) + q^{*\gamma} \psi = 0 \\ (\text{IV}) \pi y^* - \gamma q^{*\gamma-1} = 0 \end{cases}$$

Substituindo-se (IV) em (III):

$$\gamma q^{*\gamma-1} (\beta - q^*) + q^{*\gamma} \psi = 0$$

Dividindo-se essa equação por  $q^{*\gamma-1}$ :

$$\gamma(\beta - q^*) + q^* \psi = 0 \rightarrow q^* = \frac{\beta \gamma}{\gamma - \psi} \quad (\text{V})$$

Substituindo-se (V) em (IV):

$$\pi y^* = \gamma \left( \frac{\beta \gamma}{\gamma - \psi} \right)^{\gamma-1} \rightarrow y^* = \frac{\gamma}{\pi} \left( \frac{\beta \gamma}{\gamma - \psi} \right)^{\gamma-1} \quad (\text{VI})$$

Mas  $1 \leq q^* \leq \delta$  (onde  $\delta$  é o limite da lei de zoneamento,  $\delta = \delta_{max} \cdot AT =$  densidade máxima permitida  $\delta_{max}$  x área de terreno AT), logo:  $1 \leq \frac{\beta\gamma}{\gamma-\psi} \leq \delta$

A fim de facilitar a resolução dessa equação simultânea, multiplica-se a expressão por  $\gamma - \psi$ :

$$\gamma - \psi \leq \beta\gamma \leq \delta(\gamma - \psi)$$

Resolvendo-se as desigualdades simultânea, tem-se do lado esquerdo:

$$\gamma - \psi \leq \beta\gamma \text{ que implica } \gamma \leq \frac{\psi}{1-\beta}$$

E, do lado direito, tem-se:

$$\beta\gamma \leq \delta(\gamma - \psi) \text{ que resulta em } \gamma > \frac{\delta\psi}{\delta-\beta}.$$

Logo, (V) e (VI) são válidas quando  $\frac{\delta\psi}{\delta-\beta} < \gamma \ll \frac{\psi}{1-\beta}$ .

Se  $q^* \geq \delta \rightarrow q^* = \delta$  (a densidade ótima fica limitada a  $\delta$ ) (VI).

Substituindo-se (VI) em (III):

$$\pi y^*(\beta - \delta) + \delta^\gamma \psi = 0 \rightarrow y^* = \frac{\delta^\gamma \psi}{\pi(\delta - \beta)}$$

$$\text{Se } q^* = 1, \text{ então } \pi y^*(\beta - 1) + 1^\gamma \psi = 0 \rightarrow y^* = \frac{\psi}{\pi(1-\beta)}$$

Equação (39):

Observação 1) Análise de  $j_2: i > v_x$

O termo dentro da raiz da equação de  $j_2$  é maior do que o termo fora dela, portanto,  $j_2 < 0$ .

$$W_h(z) = C_1 z^{j_1} + C_2 z^{j_2}$$

Se  $j_2 < 0$ , o segundo termo de  $W_h$  pode ser representado por  $\frac{C_2}{z^{-j_2}}$ .

Observação 2) Quando  $P = 0$  (e, portanto,  $z = P/X = 0$ )  $\rightarrow V = 0$  e  $W = V/X = 0$ .

Assim, para que o termo  $C_2 z^{j_2}$  não “exploda”, quando  $z=0$ , é necessário que  $C_2 = 0$ .

Isso só é válido sob a condição  $i > v_x$ . Ou seja,  $j_2$  é uma raiz descartada.

Logo,  $W(z)$ , que é composto por uma solução homogênea e uma solução particular, resume-se a:

$$W(z) = W_{homog}(p) + W_{part}(p) = C_1 z^{j_1} + \beta \pi z$$

Equações (40) a (44):

Dado que no exercício  $V^I(X, P) = P - X$ , tem-se que no momento de exercício ( $z = z^*$ ):

$$W(z^*) = \frac{V^I(P^*, X^*)}{X^*} = z^* - 1$$

O que resulta nas soluções de *value-matching condition* e *smooth-pasting condition* da equação 40:

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ W(z^*) = z^* - 1 \\ W'(z^*) = 1 \end{cases}$$

Partindo-se de  $W(z) = C_1 z^{j_1} + \beta \pi z$  e quando  $z = z^*$ , tem-se:

$$\begin{cases} W(z^*) = C_1 z^{*j_1} + \beta \pi z^* = z^* - 1 & (I) \\ W'(z^*) = j_1 C_1 z^{*j_1-1} + \beta \pi = 1 & (II) \end{cases}$$

Há duas equações e duas incógnitas (I) e (II). Multiplicando (II) por (-1) e somando membro a membro em (I):

$$(C_1 - j_1 C_1) z^{*j_1} = -1 \rightarrow z^{*j_1} = \frac{-1}{C_1(1-j_1)} \quad (III)$$

$$\text{De (II) isola-se } C_1 = \frac{1-\beta\pi}{j_1 z^{*j_1-1}} \quad (\text{equação 44})$$

Substituindo essa última equação em (III):

$$z^{*j_1} = \frac{-1}{\frac{1-\beta\pi}{j_1 z^{*j_1-1}} (1-j_1)}$$

Simplificando-a e isolando  $z^*$ , resulta:

$$z^* = \left( \frac{j_1}{j_1 - 1} \right) \left( \frac{1}{1 - \beta\pi} \right)$$

Substituindo-se  $z^*$  em  $C_1$ , tem-se:

$$C_1 = \left( \frac{1}{j_1 - 1} \right) z^{*-j_1}$$

Os valores de  $C_1$  e  $z^*$  assim obtidos são os valores dos resultados (42) e (43).

Substituindo-se  $C_1$  em  $W(z)$ , tem-se:

$$W(z) = \pi\beta z + C_1 z^{j_1} = \pi\beta z + \left[ \left( \frac{1}{j_1 - 1} \right) z^{*-j_1} \right] z^{j_1} = \pi\beta z + \frac{1}{(j_1 - 1)} \frac{z^{j_1}}{z^{*j_1}}$$

Finalmente se obtém a equação (44):

$$W(z) = \beta\pi z + \frac{1}{j_1 - 1} \left( \frac{z}{z^*} \right)^{j_1}$$

Observação 3) Considerando-se as equações de (39) a (44), no momento do exercício, P e X são determinísticos. Portanto, não faz sentido manter os parâmetros  $\sigma_p$  e  $\sigma_x$ . Quigg (1993) argumenta que no exercício a incerteza é nula e que, portanto,  $\omega \rightarrow 0$ .

O fato de  $\omega \rightarrow 0$  implica  $j \rightarrow \infty$  e, portanto,  $\frac{j}{j-1} \rightarrow 1$ .

Uma vez que  $z^* = \left( \frac{j_1}{j_1 - 1} \right) \left( \frac{1}{1 - \beta\pi} \right)$ , se  $j \rightarrow \infty$ ,  $\frac{j}{j-1} \rightarrow 1$  e  $z^* \rightarrow \left( \frac{1}{1 - \beta\pi} \right)$ , por consequência:

$$W(z^*) \rightarrow \frac{\beta z^*}{1 - v_p}$$

## Regressões

### Correlations

|                     | logP        | logAConstr | logAterreno | L3    | L2    | L1    | L0    | Ano   | T0     | Altura | Idade |        |
|---------------------|-------------|------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| Pearson Correlation | logP        | 1,000      | ,893        | ,683  | -,278 | ,325  | -,209 | ,286  | ,203   | ,181   | ,665  | -,203  |
|                     | logAConstr  | ,893       | 1,000       | ,850  | -,278 | ,204  | -,193 | ,174  | -,027  | ,102   | ,694  | ,027   |
|                     | logAterreno | ,683       | ,850        | 1,000 | -,242 | ,182  | -,093 | ,030  | -,052  | ,043   | ,510  | ,052   |
|                     | L3          | -,278      | -,278       | -,242 | 1,000 | -,454 | ,620  | -,378 | ,120   | -,010  | -,173 | -,120  |
|                     | L2          | ,325       | ,204        | ,182  | -,454 | 1,000 | -,172 | ,074  | -,114  | -,034  | -,002 | ,114   |
|                     | L1          | -,209      | -,193       | -,093 | ,620  | -,172 | 1,000 | -,138 | ,150   | -,045  | -,180 | -,150  |
|                     | L0          | ,286       | ,174        | ,030  | -,378 | ,074  | -,138 | 1,000 | ,033   | ,216   | ,186  | -,033  |
|                     | Ano         | ,203       | -,027       | -,052 | ,120  | -,114 | ,150  | ,033  | 1,000  | ,051   | ,041  | -1,000 |
|                     | T0          | ,181       | ,102        | ,043  | -,010 | -,034 | -,045 | ,216  | ,051   | 1,000  | -,119 | -,051  |
|                     | Altura      | ,665       | ,694        | ,510  | -,173 | -,002 | -,180 | ,186  | ,041   | -,119  | 1,000 | -,041  |
|                     | Idade       | -,203      | ,027        | ,052  | -,120 | ,114  | -,150 | -,033 | -1,000 | -,051  | -,041 | 1,000  |
| Sig. (1-tailed)     | logP        | ,000       | ,000        | ,000  | ,000  | ,000  | ,002  | ,000  | ,003   | ,008   | ,000  | ,003   |
|                     | logAConstr  | ,000       | ,000        | ,000  | ,000  | ,003  | ,005  | ,010  | ,362   | ,086   | ,000  | ,362   |
|                     | logAterreno | ,000       | ,000        | ,001  | ,000  | ,007  | ,108  | ,347  | ,244   | ,285   | ,000  | ,244   |
|                     | L3          | ,000       | ,000        | ,001  | ,000  | ,000  | ,000  | ,000  | ,055   | ,449   | ,010  | ,055   |
|                     | L2          | ,000       | ,003        | ,007  | ,000  | ,000  | ,010  | ,163  | ,064   | ,325   | ,490  | ,064   |
|                     | L1          | ,002       | ,005        | ,108  | ,000  | ,010  | ,000  | ,032  | ,022   | ,275   | ,008  | ,022   |
|                     | L0          | ,000       | ,010        | ,347  | ,000  | ,163  | ,032  | ,000  | ,332   | ,002   | ,006  | ,332   |
|                     | Ano         | ,003       | ,362        | ,244  | ,055  | ,064  | ,022  | ,332  | ,000   | ,247   | ,294  | ,000   |
|                     | T0          | ,008       | ,086        | ,285  | ,449  | ,325  | ,275  | ,002  | ,247   | ,000   | ,055  | ,247   |
|                     | Altura      | ,000       | ,000        | ,000  | ,010  | ,490  | ,008  | ,006  | ,294   | ,055   | ,000  | ,294   |
|                     | Idade       | ,003       | ,362        | ,244  | ,055  | ,064  | ,022  | ,332  | ,000   | ,247   | ,294  | ,000   |

**Model Summary<sup>b</sup>**

| Model | R                 | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | Change Statistics |          |     |     |               | Durbin-Watson |
|-------|-------------------|----------|-------------------|----------------------------|-------------------|----------|-----|-----|---------------|---------------|
|       |                   |          |                   |                            | R Square Change   | F Change | df1 | df2 | Sig. F Change |               |
| 1     | ,959 <sup>a</sup> | ,921     | ,916              | ,28227                     | ,921              | 218,885  | 9   | 170 | ,000          | 1,940         |

a. Predictors: (Constant), Idade, logAConstr, T0, L2, L0, L1, Altura, L3, logAterreno

b. Dependent Variable: logP

**ANOVA<sup>b</sup>**

| Model |            | Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig.              |
|-------|------------|----------------|-----|-------------|---------|-------------------|
| 1     | Regression | 156,964        | 9   | 17,440      | 218,885 | ,000 <sup>a</sup> |
|       | Residual   | 13,545         | 170 | ,080        |         |                   |
|       | Total      | 170,510        | 179 |             |         |                   |

a. Predictors: (Constant), Idade, logAConstr, T0, L2, L0, L1, Altura, L3, logAterreno

b. Dependent Variable: logP

**Coefficients<sup>a</sup>**

| Model |             | Unstandardized Coefficients |            | Standardized Coefficients | t       | Sig. | Collinearity Statistics |       |
|-------|-------------|-----------------------------|------------|---------------------------|---------|------|-------------------------|-------|
|       |             | B                           | Std. Error | Beta                      |         |      | Tolerance               | VIF   |
| 1     | (Constant)  | 8,352                       | ,328       |                           | 25,450  | ,000 |                         |       |
|       | logAConstr  | 1,067                       | ,065       | ,892                      | 16,417  | ,000 | ,158                    | 6,321 |
|       | logAterreno | -,178                       | ,055       | -,144                     | -3,231  | ,001 | ,237                    | 4,226 |
|       | L3          | ,248                        | ,068       | ,127                      | 3,647   | ,000 | ,386                    | 2,588 |
|       | L2          | ,646                        | ,071       | ,234                      | 9,104   | ,000 | ,710                    | 1,408 |
|       | L1          | -,167                       | ,058       | -,085                     | -2,892  | ,004 | ,540                    | 1,853 |
|       | L0          | ,239                        | ,056       | ,109                      | 4,252   | ,000 | ,706                    | 1,416 |
|       | T0          | ,217                        | ,066       | ,078                      | 3,297   | ,001 | ,830                    | 1,205 |
|       | Altura      | ,016                        | ,005       | ,106                      | 3,168   | ,002 | ,418                    | 2,390 |
|       | Idade       | -,103                       | ,010       | -,232                     | -10,476 | ,000 | ,955                    | 1,047 |

a. Dependent Variable: logP

Collinearity Diagnostics<sup>a</sup>

| Model | Dimension | Eigenvalue | Condition Index | Variance Proportions |            |             |     |     |     |     |     |        |       |     |
|-------|-----------|------------|-----------------|----------------------|------------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|-------|-----|
|       |           |            |                 | (Constant)           | logAConstr | logAterreno | L3  | L2  | L1  | L0  | T0  | Altura | Idade |     |
| 1     | 1         | 6,864      | 1,000           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,00 | ,00 | ,00 | ,00 | ,00 | ,00    | ,00   | ,00 |
|       | 2         | 1,144      | 2,449           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,04 | ,28 | ,05 | ,00 | ,00 | ,00    | ,00   | ,00 |
|       | 3         | ,871       | 2,808           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,00 | ,03 | ,01 | ,00 | ,73 | ,00    | ,00   | ,00 |
|       | 4         | ,548       | 3,538           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,02 | ,39 | ,19 | ,02 | ,08 | ,01    | ,01   | ,01 |
|       | 5         | ,261       | 5,127           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,09 | ,02 | ,23 | ,37 | ,03 | ,00    | ,08   | ,08 |
|       | 6         | ,147       | 6,840           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,09 | ,05 | ,11 | ,01 | ,00 | ,07    | ,66   | ,66 |
|       | 7         | ,110       | 7,891           | ,00                  | ,00        | ,00         | ,59 | ,13 | ,36 | ,46 | ,05 | ,07    | ,00   | ,00 |
|       | 8         | ,050       | 11,674          | ,02                  | ,00        | ,01         | ,07 | ,05 | ,01 | ,02 | ,03 | ,42    | ,25   | ,25 |
|       | 9         | ,004       | 42,890          | ,59                  | ,00        | ,29         | ,09 | ,00 | ,02 | ,08 | ,03 | ,16    | ,00   | ,00 |
|       | 10        | ,001       | 92,429          | ,39                  | ,99        | ,71         | ,01 | ,04 | ,02 | ,02 | ,05 | ,28    | ,00   | ,00 |

a. Dependent Variable: logP

## One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

|                                |                | Standardized Residual |
|--------------------------------|----------------|-----------------------|
| N                              |                | 180                   |
| Normal Parameters <sup>a</sup> | Mean           | ,0000000              |
|                                | Std. Deviation | ,97166562             |
| Most Extreme Differences       | Absolute       | ,053                  |
|                                | Positive       | ,053                  |
|                                | Negative       | -,025                 |
| Kolmogorov-Smirnov Z           |                | ,713                  |
| Asymp. Sig. (2-tailed)         |                | ,689                  |

a. Test distribution is Normal.

**Model Summary<sup>b</sup>**

| Model | R                 | R Square | Adjusted R Square | Std. Error of the Estimate | Durbin-Watson |
|-------|-------------------|----------|-------------------|----------------------------|---------------|
| 1     | ,039 <sup>a</sup> | ,002     | -,004             | 1,34163                    | 1,793         |

a. Predictors: (Constant), ZPR\_2

b. Dependent Variable: ZRE\_2

(Pesarán-Pesarán)

**Residuals Statistics<sup>a</sup>**

|                                   | Minimum | Maximum | Mean    | Std. Deviation | N   |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|----------------|-----|
| Predicted Value                   | 13,7007 | 19,8247 | 17,2489 | ,93643         | 180 |
| Std. Predicted Value              | -3,789  | 2,751   | ,000    | 1,000          | 180 |
| Standard Error of Predicted Value | ,042    | ,167    | ,064    | ,017           | 180 |
| Adjusted Predicted Value          | 13,6744 | 19,8330 | 17,2470 | ,93940         | 180 |
| Residual                          | -,61858 | ,79436  | ,00000  | ,27509         | 180 |
| Std. Residual                     | -2,191  | 2,814   | ,000    | ,975           | 180 |
| Stud. Residual                    | -2,246  | 2,921   | ,003    | 1,007          | 180 |
| Deleted Residual                  | -,66364 | ,85748  | ,00190  | ,29426         | 180 |
| Stud. Deleted Residual            | -2,273  | 2,988   | ,004    | 1,014          | 180 |
| Mahal. Distance                   | 2,951   | 61,834  | 8,950   | 6,809          | 180 |
| Cook's Distance                   | ,000    | ,114    | ,007    | ,014           | 180 |
| Centered Leverage Value           | ,016    | ,345    | ,050    | ,038           | 180 |

a. Dependent Variable: logP

Histogram

