

ANÁLISE DE MÉTODOS DE REPLICAÇÃO: O CASO IBOVESPA

Hsia Hua Sheng

Economista pela USP, Doutorando em Finanças na FGV-EAESP e
Professor de Finanças da Universidade Presbiteriana Mackenzie.
E-mail: hsiahseng@gmail.br

Richard Saito

Ph. D. em Engenharia Econômica pela Stanford University e
Professor do Departamento de Contabilidade, Finanças e Controle da FGV-EAESP.
E-mail: rsaito@fgvsp.br

RESUMO

Este artigo apresenta e implementa os principais métodos quantitativos para replicar o Índice Bovespa. Os modelos utilizados são: replicação plena, carteira de mínima variância global, *Black* e minimização quadrática sem venda a descoberto, cujos critérios de análise incluem os parâmetros de *tracking error*, beta, R-quadrado e semelhança de série em relação à média e à variância. Concluiu-se que não existe o melhor modelo na aplicação ao Ibovespa, porque todos mostraram seus méritos e suas limitações nas diversas condições simuladas, além do fato de cada administrador poder ter necessidades diferentes, mutáveis no espaço e no tempo.

ABSTRACT

This article presents and implements the main numerical methods used to replicate the Bovespa Index. The implemented models were full replication, minimum global variance portfolio, Black model and square minimization with short selling. The results were verified under the parameters of tracking error, beta, R² and serial similarity of average and variance. It was concluded that there is not the only way to achieve the best result, because all methods present strengths and weakness on the different contexts tested. In addition, managers may have different necessities on the time.

PALAVRAS-CHAVE

Modelo de replicação, *tracking error*, arbitragem de índice, otimização quadrática, carteira espelho.

KEY WORDS

Replication models, tracking error, index arbitrage, square optimization, proxy portfolio.

INTRODUÇÃO

A técnica de replicação de um índice é parte fundamental da estratégia passiva, cujo objetivo não é usufruir o ganho acima do mercado, mas, sim, compor uma carteira de investimento (carteira espelho) para acompanhar o retorno de um determinado índice de mercado. Quanto mais desconcentrada estiver a composição teórica de um índice de mercado, diante de fatos exógenos e da estrutura de mercado de capitais, mais ações influenciarão a variação do índice e haverá maior exigência da modelagem da carteira espelho no controle de desvios em relação ao índice-alvo. Assim, o sucesso da estratégia passiva passa pela correta modelagem de replicação, que exige uma capacidade precisa de incorporar e refletir as volatilidades do mercado.

Existem vários benefícios no uso da estratégia passiva na administração de carteiras. Baixo custo de transação, baixa movimentação e bom desempenho em longo prazo são alguns pontos mencionados por Sharpe (1999). Baixo risco é outro ponto forte da estratégia passiva. Por meio da diversificação de ações, seu risco específico é eliminado, permanecendo na carteira apenas o risco de mercado.

Ao contrário de outros países, a estratégia passiva não é muito utilizada no mercado brasileiro. Em 1999, do total de recursos investidos em fundos no Brasil, menos de 1% foi investido no fundo passivo. Enquanto nos Estados Unidos, de acordo com o material institucional do grupo Vanguard (1999) – um dos maiores administradores de fundos naquele país, com US\$ 435 bilhões –, 30% dos recursos foram investidos em fundos de índices. Dentro desses 30%, havia, em 1998, aproximadamente US\$ 74 bilhões investidos no 500 Index Fund (o fundo que reproduz o retorno do S&P 500).

O caminho-padrão e mais simples de replicarem-se as variações de um índice é manter a mesma proporção das participações das ações que compõem a carteira teórica de um índice. A utilização desse método implica a incorporação de ações de menor liquidez em sua composição. Devido ao baixo volume de negociação e ao súbito movimento de demanda e de oferta, essas ações, geralmente representadas por pequenas empresas, estão sujeitas a grandes oscilações em seus preços, o que dificulta o balanceamento desses papéis na carteira (Elton e Gruber, 1995). Por esse motivo, quanto maior a composição da carteira teórica do índice, menor será o interesse em fazer uma combinação exata das proporções.

Outro caminho, mais complexo, é estender a abordagem de otimização quadrática para encontrar uma estratégia eficiente de replicação. A idéia original está descrita em *Portfolio selection* de Markowitz (1991). A essência dessa abordagem é encontrar a fronteira eficiente por meio da otimização da matriz de covariância, que representa as inter-relações diretas entre as ações, ou seja, um

conjunto eficiente é determinado pela minimização de risco para qualquer nível de retorno esperado.

Em um contexto de replicação de índice, o risco é a volatilidade representada pela variação de *tracking error* (desvio do retorno da carteira em relação ao retorno do índice-alvo). Desta forma, a modelagem de replicação visa encontrar uma carteira de mínima variância para um nível desejado de *tracking error*. Três principais modelos derivados da abordagem de otimização podem ser enumerados: Modelo de Mínima Variância Global (MVG), Modelo de *Black* (MB) e Modelo de Minimização Quadrática (MMQ). Os modelos diferenciam-se pelas várias hipóteses adotadas. Por exemplo, a hipótese da venda a descoberto de ativo é permitida somente nos modelos de Mínima Variância Global e de *Black*.

O SUCESSO DA ESTRATÉGIA PASSIVA PASSA PELA CORRETA MODELAGEM DE REPLICAÇÃO, QUE EXIGE UMA CAPACIDADE PRECISA DE INCORPORAR E REFLETIR AS VOLATILIDADES DO MERCADO.

O objetivo deste artigo é comparar quatro modelos de replicação, com a aplicação ao Ibovespa, e escolher o método que melhor se adapte a tal índice. O Índice Bovespa é escolhido em função do elevado volume negociado, da série histórica longa e consistente, de sua utilização para avaliar os produtos de rendas variáveis e da associação com vários papéis futuros, termos e opções (Leite e Sanvicente, 1994).

Há pouca literatura empírica acerca do assunto utilizando séries financeiras brasileiras. No entanto, é possível encontrar alguns trabalhos estrangeiros sobre a replicação de índices estrangeiros. O banco de investimentos Salomon Brothers (1995) fez uma análise comparativa entre algumas estratégias aplicadas para formação de carteira espelho de índices norte-americanos no mercado à vista (Quadro 1).

Percebe-se que o banco apresentou outros métodos além dos modelos propostos pelo presente artigo. De fato, há inúmeros modelos matemáticos para formação de carteira passiva (Sheng, 2000; Lamont, 1999; Stern, 1995). Entre eles estão os modelos de replicação plena, modelos de equilíbrios, modelos de fator, modelos de programação quadrática e, por fim, modelos de replicação sintética.

Os modelos aqui testados serão avaliados em relação aos critérios estatísticos de comparação dentro da amostra, tais como o P-valor dos testes de hipóteses de média

e de variâncias, o coeficiente beta e o R-quadrado da regressão linear simples. Os modelos são estimados e testados para reproduzir o comportamento do Índice Bovespa durante o período de janeiro de 1994 a dezembro de 1999 (dados mensais), utilizando-se um período anterior de 60 meses ao momento de recomposição (balanceamento) para estimar as matrizes de variância histórica.

A precisão dos modelos será testada em diversas situações. As principais são: tamanhos da carteira, frequência de balanceamento, grau de concentração do índice-alvo e ambientes econômicos.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: a segunda seção é destinada à definição e à descrição da implementação dos modelos utilizados neste estudo; na terceira, serão apresentadas as análises comparativas e analíticas sobre os resultados dos modelos; por fim, a última seção é dedicada às conclusões sobre os resultados encontrados, comparando-os com os obtidos na literatura estrangeira.

OS MODELOS DE REPLICAÇÃO

Escolheram-se quatro modelos a serem apresentados e implementados neste estudo. São eles: a) Modelo de Replicação Plena, b) Carteira de Mínima Variância Global, c) Modelo de *Black*, d) Minimização Quadrática.

Abordagem tradicional: Replicação Plena (MRP)

A construção desse modelo obedece às mesmas regras da construção do Ibovespa, o seja, é orientada pelo critério

de negociabilidade dos ativos, que, por sua vez, define a participação de cada ativo na carteira teórica do índice. Baseada nos critérios de formação da carteira teórica, a Bolsa realiza e divulga as recomposições quadrimestrais da quantidade teórica de cada ação (Bovespa, 1999). Essa quantidade permanecerá constante pelos quatro meses de vigência da carteira teórica, sofrendo alterações somente caso ocorra a distribuição de proventos (dividendos, bonificações, subscrições) por parte da empresa. Com base nessas informações, constrói-se uma série de carteiras por ordem decrescente de participação de cada papel na carteira teórica. O peso de cada ativo nas carteiras espelhos é calculado pela razão entre a participação original de cada ativo e a soma total das participações originais dos ativos participantes na carteira.

Carteira de Mínima Variância Global (MVG)

Este é o primeiro modelo de otimização quadrática a ser aplicado no artigo. Diferentemente do modelo anterior, que utiliza a abordagem linear para ponderar os ativos, o MVG usa o programa quadrático para encontrar a carteira ótima. De acordo com Ingersoll (1987), o modelo é parte da resolução do problema de média e de variância na administração de carteira de ativos e possui o seguinte formato:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \frac{1}{2} w' \Sigma w \\ & \text{Sujeito a } 1' w = 1 \end{aligned}$$

Quadro 1 – Os principais métodos de replicação no mercado norte-americano

Técnicas	Vantagens	Desvantagens
<i>Cash markets</i>		
Replicação Plena	<ul style="list-style-type: none"> • Desvio de replicação mais baixo • Renda proveniente de um empréstimo de ações • Adequado para manter por um período longo • Rebalanceamento menos freqüente • Giro mais baixo 	<ul style="list-style-type: none"> • Custo de transação de rebalanceamento de carteira regular, isto é, mudanças de constituição, ações corporativas, etc. • Custos operacionais grandes • Necessidade de comprar ações ilíquidas
<i>Stratified Sampling</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Diversificação lógica por setor e capitalização • Prático para um índice amplo 	<ul style="list-style-type: none"> • Não-consideração de correlações entre ações • Falta de garantia de obtenção de uma solução ótima
Otimização Quadrática	<ul style="list-style-type: none"> • Incorporação de correlação para reduzir o <i>tracking error</i> • Natural para adaptar restrições formais, isto é, liquidez, setor, etc. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desempenho sensível a mudanças de correlação • A solução depende do método da estimação de correlação • Solução múltipla ótima; algumas podem ser contra intuição

Fonte: Salomon Brothers (1995).

em que, w é o vetor com os pesos das ações da carteira, Σ é a matriz de covariância e 1 é o vetor unitário. Nesse caso, a venda a descoberto de ativos é permitida. Para encontrar a solução ótima, construiu-se a função objetiva:

$$L \equiv w' \Sigma w / 2 + \lambda (1 - 1' w)$$

em que λ é o multiplicador de Lagrange. A função é diferenciada para atender à condição de primeira ordem.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w} = \Sigma w - \lambda 1$$

O conjunto de soluções (w^*) é encontrado:

$$w^* = \lambda \Sigma^{-1} 1$$

No entanto, para encontrar a solução da carteira de mínima variância global (W_g), é preciso seguir as seguintes etapas: a) substituir w^* em $w' \Sigma w$ para encontrar a equação de parábola que representa todas as carteiras de mínima variância no espaço retorno e desvio-padrão; b) derivar essa equação com relação ao retorno; c) calcular o retorno esperado da carteira de mínima variância, igualando a equação obtida a zero; d) determinar o valor de λ a partir do retorno esperado. Por fim, a solução é apresentada pela fórmula a seguir:

$$W_g = \frac{\Sigma^{-1} 1}{1' \Sigma^{-1} 1}$$

Modelo de Black (MB)

Esse modelo propõe, na ausência do ativo sem risco, a minimização de variância de retornos da carteira (\bar{r}_p) sujeita a um nível de retorno desejado, sem a restrição para vendas a descoberto. No caso da replicação do índice, substitui-se o retorno desejado pelo excesso de retornos em relação ao índice-alvo e iguala-se a zero o excesso de retorno. Pode-se expressar o modelo matematicamente por:

$$\text{MinVar}(r_p) = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}$$

sujeita a

$$\sum_i w_i \bar{r}_i = 0$$

$$\sum_i w_i = 1$$

em que w_i e w_j significam a proporção (peso) do ativo i e j na carteira, σ_{ij} é covariância de retorno do ativo i

e do ativo j e \bar{r}_i é média de excesso de retornos.

Para resolvê-lo, forma-se a função objetiva Lagrangiana:

$$L = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 (\sum w_i \bar{r}_i) + \lambda_2 (\sum w_i - 1)$$

Derivando L parcialmente com relação às variáveis endógenas:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

As equações resultantes serão expressas por matrizes jacobianas:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & \bar{r}_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & & 2\sigma_{2n} & \bar{r}_2 & 1 \\ & & & & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & & 2\sigma_{nn} & \bar{r}_n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & & \bar{r}_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação também pode ser representada na forma matricial:

$$CW = k$$

em que C é matriz de coeficientes, W é vetor de pesos, k é vetor de constantes.

Em seguida, obteve-se a seguinte solução para os pesos dos ativos que compõem a carteira espelho:

$$W = C^{-1} k$$

Minimização Quadrática (MMQ)

A definição matemática desse modelo é igual à do MB, porém com a entrada de uma restrição ($w_{ij} > 0$) que proíbe vendas a descoberto. Para não produzir participações negativas dos ativos na carteira, Francis e Archer (1971) propuseram algumas alterações nos algoritmos da solução de minimização de variância.

No ponto em que o cálculo atinge pesos negativos, a análise deve ser interrompida e as entradas de tal ativo da matriz de covariância e do vetor de retorno médio devem ser removidas. Em seguida, pode-se recomençar a rotina, invertendo a nova matriz de covariância para encontrar um novo vetor de pesos. No caso de ainda haver pesos negativos, devem-se eliminá-los e assim por diante, até encontrar uma carteira na qual todas as participações sejam positivas.

RESULTADOS DA REPLICAÇÃO DO ÍNDICE BOVESPA

Nesta seção, utilizam-se dados mensais coletados no sistema Economática sobre o Ibovespa e os preços das ações que compõem esse índice para a análise dos modelos de replicação propostos. Os preços das ações são de fechamentos mensais, expressos em moeda local, ajustados por dividendos, bonificações e subscrições que ocorreram entre janeiro de 1989 e dezembro de 1999. Além disso, as ações que deixaram de ser negociadas ou que não faziam parte do banco de dados da Economática foram excluídas da análise.

Na primeira subseção, verificam-se os efeitos da autocorrelação de dados na série do Ibovespa para definir a frequência ideal a ser utilizada na simulação. Para determinar qual modelo se ajusta melhor ao Ibovespa é feita uma replicação de índice no período de 1994 a 1999. Os modelos são analisados em duas situações diferentes. Na segunda subseção, examinam-se os desempenhos dos modelos nas situações controláveis pelo administrador: tamanho da carteira e mudança de frequência de balanceamento. Na terceira subseção, é verificado o desempenho dos modelos nas situações não controláveis pelo administrador. A influência do grau de participações das ações do índice e o impacto das crises econômicas serão investigados. Por fim, na quarta subseção, são comparados resultados obtidos neste estudo e resultados do banco Salomon Brothers (1995).

Autocorrelação de dados

A ocorrência de elevada autocorrelação de dados em uma série temporal de retornos financeiros afeta a estimação dos parâmetros. Pope e Yadav (1994) testaram vários coeficientes de retornos e de *tracking error* de diferentes frequências durante o mesmo período. Eles concluíram que a autocorrelação provoca um viés na estimação do *tracking error*, principalmente nas estimações com frequências altas (por exemplo, diárias e semanais). Além disso, verificou-se que a autocorrelação não só ocorre nos dados defasados, em primeira e segunda ordem, mas também provoca impacto diferente sobre as carteiras com características diversas (liquidez, tamanho e setor). Conseqüentemente, a comparação da estimativa de *tracking error* será afetada. A solução seria fazer um ajuste depois do cálculo de *tracking error*,

ou usar dados mensais, ou, ainda, utilizar outros dados com frequências mais baixas.

Para confirmar essa hipótese, realizou-se um teste para verificar a existência da autocorrelação na série dos retornos do Ibovespa. De acordo com Greene (1997), um dos testes mais usados para identificar a estrutura de autocorrelação nas séries temporais é o definido como estatísticas- Q de Ljung-Box. As estatísticas- Q , na defasagem k , consistem em um teste estatístico para a hipótese nula de que não há autocorrelação até a ordem k e são calculadas pela fórmula:

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{r_j^2}{T-j}$$

em que Q é distribuído de maneira assintótica para normal, r é a j -ésima autocorrelação, j é a ordem de defasagem, T é o número de observações.

O coeficiente de autocorrelação entre os pontos próximos com defasagem k na série de tempo y_t é definido como:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+k})}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+k}}}$$

Na Tabela 1, percebe-se que existe uma autocorrelação muito forte na seqüência diária em todos os níveis de defasagens (1, 2 e 3) pois os p-valores são menores do que o nível de significância de 5% (0,05); conseqüentemente, rejeita-se a hipótese nula. Somente as frequências semanais e mensais foram aprovadas nesse teste. Tendo em vista esse resultado, somado ao interesse de garantir a comparabilidade de resultados com a pesquisa norte-americana, adotaram-se os dados mensais para avaliar os modelos propostos.

Situações controláveis pelo administrador

O tamanho da carteira

Para determinar qual modelo se ajusta melhor às oscilações do Ibovespa, a cada tamanho de carteira, são construídas várias carteiras espelhos. Em cada tamanho da carteira, os ativos são os mesmos para todos os modelos, porém o peso de cada ativo é definido por modelo. A escolha dos ativos obedece à ordem decrescente de parti-

Tabela 1 – Resultado do teste das estatísticas- Q de julho de 1994 a setembro de 1998 (p-valores)

Defasagens	Diária	Semanal	Mensal
Lag (1)	0,028	0,801	0,961
Lag (2)	0,025	0,876	0,939
Lag (3)	0,005	0,966	0,952
Número de observação	1051	221	52

cipação das ações no Ibovespa.

Os resultados são gerados e testados estatisticamente. Todos os modelos foram aprovados com nível de significância de 5%. A Tabela 2 resume o melhor modelo em cada critério de avaliação.

Analisando a Tabela 2, pode-se observar que o resultado do teste de hipótese de média e de variância do modelo MVG no período entre 1994 e 1998 é, em média, mais significativo do que de outros modelos nas carteiras com duas e com quatro ações. Isso significa que esse modelo não rejeitou, com maior grau de significância, a hipótese nula de que ambas possuem a mesma média ou variância. Esse resultado também é confirmado por outros critérios de avaliação. O *tracking error* apresentou o menor desvio, e o coeficiente beta da regressão simples do modelo se aproximou mais do valor 1. Apesar de não aparecer na tabela, os valores de R^2 do MVG estão muito próximos do melhor modelo.

Nas demais carteiras, a superioridade do MRP, particularmente quando se trata de uma carteira com mais de 20 ativos, é dominante. A Tabela 3 mostra que, quanto maior o número de ativos proporcional aos pesos definidos na carteira, melhor é o desempenho do modelo de replicação. Assim, quando a carteira engloba os 40 ativos mais negociados da Bolsa, o coeficiente beta fica próxi-

mo de 1 e o R^2 da regressão também fica muito próximo de 1. Essa tendência é confirmada por outras duas medidas: o *tracking error*, que fica próximo de zero, e o elevado p-valor dos testes de média e variância.

O bom desempenho desse modelo é explicado pelo fato de que a negociação no mercado à vista era muito concentrada em algumas ações de empresas estatais. A Tabela 4 revela o elevado grau de concentração de negociação na Bolsa brasileira entre 1994 e 1998. A participação acumulada com apenas duas ações corresponde a 47,8% da carteira teórica do Ibovespa. Com dez ações, a participação alcança 80,4%. Dessa forma, para carteiras acima de 20 ativos, a carteira espelho aproxima-se da carteira teórica do Ibovespa, por isso o desempenho do MRP é favorecido.

A mudança da frequência de recomposição

Realizou-se aqui o mesmo teste da subseção anterior, porém aplicou-se o balanceamento quadrimestral nas carteiras. Ao comparar-se a Tabela 5 com a Tabela 2, percebe-se que o MRP conseguiu melhorar ainda mais seu desempenho em todos os critérios de avaliação e passou a ser o melhor modelo a partir de seis ativos na carteira, enquanto o MVG só conseguiu manter bons desempenhos nas pequenas carteiras.

Tabela 2 – Os melhores modelos na recomposição anual de carteiras

Tamanho da carteira	Coeficiente beta	R^2	Tracking error		Teste hipótese (p-valor)	
			Média	Desvio-padrão	Média	Variância
2	MVG	MRP	MB	MRP	MVG	MVG
4	MMQ	MRP	MVG	MRP	MVG	MVG
6	MVG	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
8	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
10	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
20	MB	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
30	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
40	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP

Tabela 3 – Resultado do MRP (recomposição anual)

Tamanho da carteira	Coeficiente beta	R^2	Tracking error		Teste hipótese (p-valor)	
			Média	Desvio-padrão	Média	Variância
2	1,05	0,98	0,7%	3,4%	0,86	0,33
4	1,05	0,98	0,4%	2,9%	0,92	0,32
6	1,04	0,99	0,3%	2,1%	0,94	0,36
8	1,04	0,99	0,3%	1,9%	0,95	0,37
10	1,03	1,00	0,3%	1,6%	0,95	0,39
20	1,01	1,00	0,0%	0,9%	0,99	0,46
30	1,01	1,00	0,0%	0,7%	1,00	0,48
40	1,00	1,00	-0,1%	0,6%	0,98	0,50

Tabela 4 – Participações das ações no Ibovespa entre 1994 e 1998

Números de ativos	Participação no Ibovespa – valor médio entre 1994 e 1998
2	47,8%
4	60,8%
6	69,9%
8	75,7%
10	80,4%
20	90,6%
30	95,4%
40	98,2%

O efeito positivo do aumento de frequência de balanceamento sobre as pequenas carteiras do MVG também se confirmou na comparação entre os resultados de balanceamento anual e quadrimestral do próprio modelo (Tabela 6 e Tabela 7). Os indicadores das carteiras com dois e quatro ativos melhoraram, enquanto, nos outros tamanhos, as medidas indicam uma perda de qualidade de replicação e, por isso, o MRP ocupou a melhor modelagem nos outros tamanhos de carteira.

Tabela 5 – Os melhores modelos na recomposição quadrimestral de carteiras

Tamanho da carteira	Coeficiente beta	R ²	Tracking error		Teste hipótese (p-valor)	
			Média	Desvio-padrão	Média	Variância
2	MVG	MRP	MVG	MRP	MVG	MVG
4	MVG	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG
6	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
8	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
10	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
20	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
30	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
40	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP

Tabela 6 – Os resultados de MVG (balanceamento anual)

Tamanho da carteira	Coeficiente beta	R ²	Tracking error		Teste hipótese (p-valor)	
			Média	Desvio-padrão	Média	Variância
2	1,02	0,96	0,3%	4,2%	0,92	0,38
4	1,03	0,97	-0,2%	3,8%	0,96	0,36
6	1,07	0,95	0,2%	4,9%	0,97	0,24
8	1,06	0,96	0,0%	4,7%	1,00	0,26
10	1,03	0,97	-0,4%	4,0%	0,92	0,35
20	0,98	0,97	-0,5%	3,6%	0,89	0,49
30	1,01	0,97	-0,5%	3,8%	0,90	0,43
40	0,99	0,94	-0,2%	4,9%	0,95	0,44

Tabela 7 – Os resultados de MVG (balanceamento quadrimestral)

Tamanho da carteira	Coeficiente beta	R ²	Tracking error		Teste hipótese (p-valor)	
			Média	Desvio-padrão	Média	Variância
2	0,98	0,97	0,2%	4,7%	0,98	0,49
4	1,03	0,98	-0,7%	3,6%	0,93	0,44
6	1,15	0,96	0,8%	7,3%	0,93	0,25
8	1,15	0,97	0,7%	6,5%	0,94	0,25
10	1,12	0,98	0,4%	5,1%	0,96	0,30
20	1,03	0,98	0,8%	4,2%	0,92	0,42
30	1,06	0,98	0,7%	4,4%	0,93	0,39
40	1,04	0,96	0,2%	5,7%	0,99	0,39

Situações não controláveis pelo administrador

A mudança de participação das ações do Ibovespa

Realizou-se um teste separado para 1999 devido à alteração significativa da participação das ações que compõem o Ibovespa. Após uma série de privatizações, que teve início em 1994, a composição de 1999 é menos concentrada do que a média de composição entre 1994 e 1998,

principalmente nos dez ativos mais negociados da Bolsa (Tabela 8). Isso significa que várias ações ganharam mais negociabilidade e volume com as privatizações.

Ao contrário dos resultados do período entre 1994 e 1998, o MVG superou o MRP nas pequenas e médias carteiras no teste de 1999. Utilizou-se *tracking error* para comparar os modelos. O Quadro 2 mostra os melhores modelos na parte esquerda para cada tamanho de carteira

Tabela 8 – Comparação de participações de ações no Ibovespa

Números de ativos	Participação no Ibovespa – valor médio entre 1994 e 1998	Participação no Ibovespa – valor em janeiro de 1999
2	47,8%	46,7%
4	60,8%	57,2%
6	69,9%	64,8%
8	75,7%	70,8%
10	80,4%	75,7%
20	90,6%	90,7%
30	95,4%	95,6%
40	98,2%	98,2%

Quadro 2 – Os melhores modelos de 1999 (balanceamento anual)

Tamanho da carteira	Os melhores modelos (em ordem decrescente)			
2	MVG	MRP	MB	
4	MVG	MRP	MB	MMQ
6	MVG	MB	MRP	MMQ
8	MVG	MB	MRP	
10	MVG	MRP	MB	
20	MRP	MVG	MB	
30	MRP	MB	MVG	
40	MRP	MB	MVG	

Tabela 9 – A composição das melhores carteiras passivas em 1999

	Tamanho de carteira									
	2		4		6		8		10	
	MVG	MRP	MVG	MRP	MVG	MB	MVG	MB	MVG	MRP
TELEBR RCTB RCTB40	67%	81%	48%	66%	43%	22%	34%	16%	34%	50%
PETROBRAS PETR4	33%	19%	31%	16%	21%	26%	13%	17%	13%	12%
TELESP TLSP4			12%	11%	12%	12%	11%	9%	8%	8%
TELEBR RCTB RCTB30			9%	8%	7%	24%	7%	21%	7%	6%
ELETRORBRAS ELET6					27%	-64%	19%	-60%	26%	5%
ELETRORBRAS ELET3					-10%	80%	-10%	67%	-18%	5%
CEMIG CMIG4							11%	15%	10%	4%
BRADESCO BBDC4							14%	14%	11%	3%
VALE R DOCE VALE5									8%	3%
BANESPA BESP4									2%	3%
Retorno acumulado (em 1999)	200%	191%	187%	178%	165%	172%	153%	157%	163%	162%

Obs.: No referente período, o retorno do Ibovespa correspondeu a 152%.

(em ordem decrescente). O MVG alcançou melhores desempenhos não só nas carteiras com dois e quatro ativos mas também nas carteiras com seis, oito e dez ativos. É provável que esse fato indique uma forte relação entre a desconcentração da composição do Ibovespa e o bom desempenho dos modelos de otimização quadrática, particularmente o MVG.

Estabilidade nos momentos de crise econômica

Por meio da visualização da Figura 1, pode-se analisar o comportamento dos modelos ao longo do período bastante conturbado na economia nacional e internacional. Nele ocorreram: a) a introdução do Plano Real (julho de 1994); b) a crise do México (dezembro de 1994); c) a crise da Ásia (final de 1997); d) a crise da Rússia (final de 1998).

Para avaliar a reação de cada modelo nos períodos de crise, consolidaram-se resultados de todos os tamanhos de cada modelo e analisou-se a estabilidade de *tracking error* nos momentos mencionados anteriormente.

A Figura 1 mostra a evolução dos modelos MRP, MVG e MB. O MRP destaca-se significativamente dentre to-

dos por sua estabilidade relativa (a magnitude do desvio é de aproximadamente 3%). Os outros dois modelos apresentam oscilações semelhantes apesar das diferenças na magnitude. Colocando em ordem crescente de magnitude, tem-se: MRP, MVG e MB.

Comparação com as referências internacionais

O último passo é a comparação entre os melhores resultados obtidos e os resultados da pesquisa norte-americana. O *tracking error*, o beta e o R^2 são medidas amplamente utilizadas pelos pesquisadores estrangeiros. Os pesquisadores do Salomon Brothers (1995), por exemplo, utilizaram esses parâmetros para avaliar o desempenho das carteiras de replicação para o Índice Wilshire 5000 (Tabela 10). Foram compostas várias carteiras, entre as quais uma carteira espelho com 1.750 ações, equivalente a 93% do peso do índice. Essa carteira, considerada a melhor, conseguiu um beta igual a 0,98, um R^2 de 0,97 e um *tracking error* médio, anual, de 1,8%. Mais tarde, os pesquisadores utilizaram estratégias sintéticas para formar a carteira espelho do Wilshire 5000. Conseguiram

Figura 1 – Gráfico consolidado dos modelos

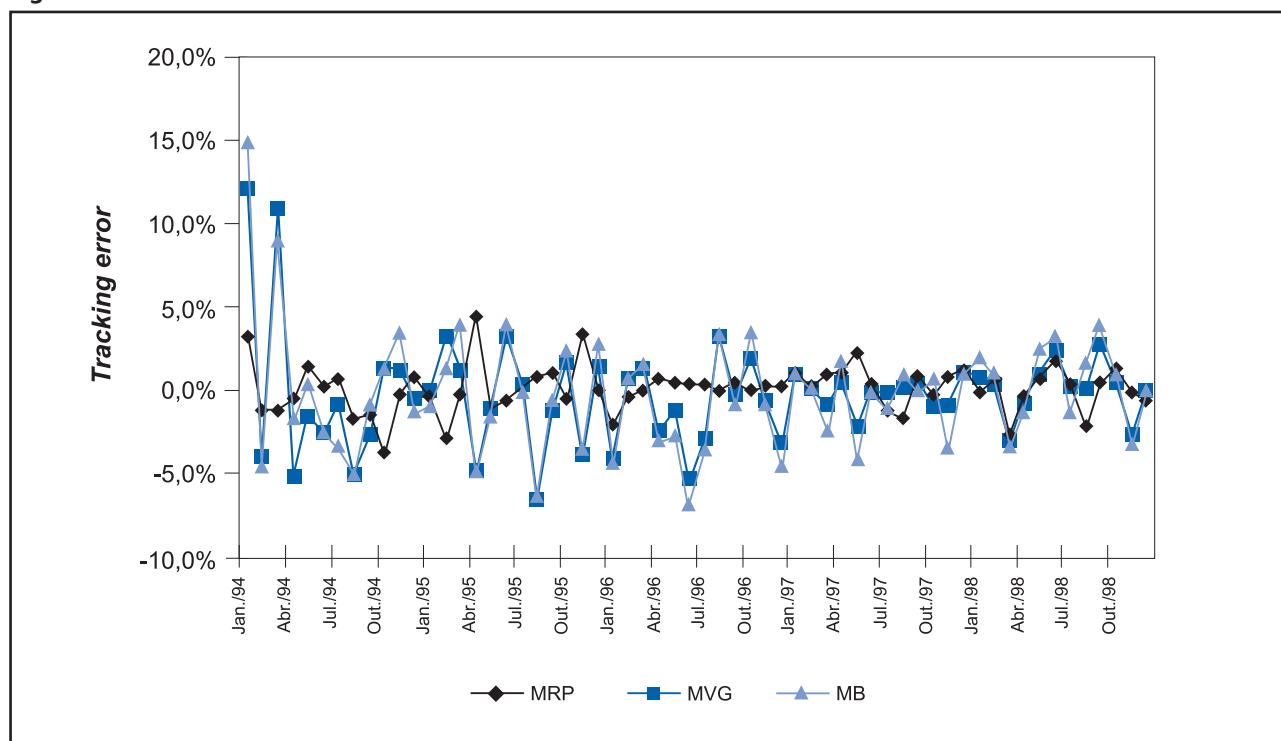


Tabela 10 – Referência norte-americana sobre a replicação do Wilshire 5000

Carteiras de replicação do Wilshire 5000	Coefficiente beta	R^2	<i>Tracking error</i> médio anualizado
Carteira composta pelas ações	0,98	0,97	1,80%
Carteira sintética	1,01	0,99	0,62%

Fonte: Salomon Brother (1995).

um resultado ainda melhor, com um beta de 1,01, um R² de 0,99 e um *tracking error* anual de 0,62%.

Os resultados dos modelos implementados são bastante semelhantes aos da replicação do Wilshire 5000. Embora os resultados de alguns modelos não tenham alcançado betas próximos de 0,97, esses mesmos modelos revelaram a boa qualidade de previsão, em termos de resíduos de regressão, com R² próximo de 1. Este é o exemplo da carteira gerada pelo MVG com apenas quatro ativos, que teve um beta de 1,03, um R² de 0,97 e um *tracking error* anual de -2%.

Outra forma de comparar resultados é baseada nas características desejáveis de um fundo de índice. De acordo com Vanguard (1999), um fundo de índice ideal é aquele que consegue reproduzir exatamente o comportamento do índice-alvo. Porém, na prática, o fundo cujo R-quadrado é maior que 0,97 e cujo beta está entre 0,95 e 1,05 também é

considerado adequado. Dessa forma, as carteiras que satisfazem essas condições são sugeridas no Quadro 3.

Quadro resumo

O Quadro 4 resume os principais pontos fracos e fortes de cada modelo.

Quadro 3 – Carteiras que satisfazem as exigências do fundo de índice

Modelos implementados	Tamanho da carteira
MRP	2; 4; 6; 8;10; 20; 30; 40
MVG	2; 4; 20
MB	30
MMQ	

Quadro 4 – Os pontos fortes e fracos de cada modelo

	Modelos			
	Replicação Plena (MRP)	Mínima Variância Global (MVG)	Black (MB)	Minimização Quadrática (MMQ)
A) SITUAÇÕES CONTROLÁVEIS				
• Baixo desvio na carteira pequena (2 - 6 ativos)	N	S	S	S
• Baixo desvio na carteira média (6 - 20 ativos)	S	S(*)	S(*)	S(*)
• Baixo desvio na carteira grande (20 - 40 ativos)	S	N	N	N
• Contribuição positiva com aumento de freqüência do balanceamento	S	S(**)	S(**)	S(**)
B) SITUAÇÕES NÃO CONTROLÁVEIS				
• Replicação favorável em um índice com sua composição concentrada	S	S(**)	S(**)	S(**)
• Estabilidade nos momentos de crise	S	N	N	N
C) CARACTERÍSTICAS				
• Facilidade para implementar o modelo	S	S	N	N
• Facilidade para incluir apenas ações líquidas	N	S	S	S
• Incorporação das correlações entre ações na análise	N	S	S	S
• Flexibilidade para adaptar novas restrições	N	N	S	S
• Solução ótima para um nível de retorno predeterminado	N	N	S	S
• Venda a descoberto	N	S	S	N

(*) Somente para a carteira com 20 ativos.

(**) Somente para carteiras pequenas.

Obs.: S = sim; N = não.

CONCLUSÃO

Após a análise comparativa dos modelos implementados, parece consistente afirmar que não existe o melhor modelo na aplicação ao Ibovespa, porque todos os modelos mostraram seus méritos e suas limitações nas diversas condições simuladas e cada administrador pode ter necessidades diferentes, mutáveis no espaço e no tempo.

Os modelos de programação quadrática (Modelos de Carteira de Mínima Variância Global, de Minimização Quadrática e de *Black*) são superiores na replicação com pequenas carteiras. A otimização de matriz de covariância contribuiu decisivamente na superioridade. No entanto, esses modelos são prejudicados na aplicação de alta frequência de balanceamento nas grandes carteiras. Em relação às situações externas, há indício de que o ambiente de crise econômica e a elevada concentração de participação de ações em poucas ações do Ibovespa prejudicam o desempenho dos modelos de otimização.

Entre os modelos de programação quadrática, o Modelo de Mínima Variância Global destacou-se pela precisão e pela facilidade de implementação. Porém, ele é mais rígido que os outros em sua modelagem, não permitindo a introdução de novas restrições e de um desvio predeterminado.

Embora o Modelo de Replicação Plena seja um pouco inferior nas carteiras pequenas, mostrou-se bastante preciso nas carteiras grandes. Esse resultado é explicado pela semelhança da carteira espelho à carteira teórica do índice quando aquela se torna grande. Além disso, a facilidade de implementação, o aumento de frequência de balanceamento e a estabilidade nos momentos de crises econômicas também favorecem o desempenho geral do modelo.

Portanto, a seleção do melhor modelo depende da definição das situações controláveis pelo administrador. O tamanho da carteira e a frequência do balanceamento influenciam nessa escolha. Não há um modelo que se adapte melhor em todas as situações, pois as mudanças provocam efeitos distintos nos modelos implementados.

No entanto, as situações controláveis não são as únicas variáveis a serem consideradas no momento da escolha. A busca constante da replicação perfeita do índice implica a avaliação permanente das situações não controláveis – como mudança de participação na composição teórica da carteira, surgimento de novas ações, crises econômicas e volatilidade do mercado.

Nesse sentido, a competência gerencial é desafiada a selecionar um modelo que concilie a dinâmica entre as situações controláveis e as não controláveis. Por exemplo, apesar da grande precisão dos modelos de otimização nos tempos de estabilidade econômica, eles não mostram tanta eficiência nos momentos de crise.

Por fim, os resultados são comparados com a pesquisa norte-americana. Embora a característica da carteira teórica do Ibovespa seja diferente da carteira do índice do mercado estrangeiro, as vantagens e desvantagens apontadas pela pesquisa norte-americana (Salomon Brothers, 1995) sobre os modelos de replicação foram confirmadas nos testes aplicados ao Ibovespa. Os resultados da replicação ao Ibovespa também alcançaram o mesmo nível dos norte-americanos, tanto na comparação direta entre o desempenho de duas carteiras espelhos quanto no cumprimento da exigência de um fundo de índice.

Ainda existem vários desafios a serem superados nesse campo de conhecimento. O teste para verificar o poder de replicação dos modelos em uma frequência mais elevada é um deles. Baseados em nossa experiência, alguns aspectos foram identificados como prováveis fatores que podem ajudar a replicar o índice no nível do dia. São os seguintes: a) o uso de modelo de programação quadrática; b) o balanceamento mais frequente nas pequenas carteiras para aumentar a precisão da replicação; c) utilização dos modelos de estimação da matriz de covariância que ponderam o efeito do tempo na estimação, por exemplo, GARCH; d) seleção de um conjunto de ações pré-analisadas para inserir no modelo de otimização, por exemplo, incorporar uma ação que aumentou a participação no Ibovespa em curto espaço de tempo. ○

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOVESPA. Bolsa de Valores de São Paulo. Os materiais institucionais. São Paulo, 1999. Disponível em: <<http://www.bovespa.com.br>>.

ELTON, E. J., GRUBER, M. J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 5. ed. New York : John Wiley & Sons, 1995. Section 2.

FRANCIS, J. C., ARCHER, S. H. *Portfolio analysis*. Englewood, NJ : Prentice-Hall, 1971. Cap. 4.

GREENE, W. H. *Econometric analysis*. 3. ed. New Jersey : Prentice-Hall, 1997. p. 595.

INGERSOLL, J. E. *Theory of financial decision making*. Savage : Rowman & Littlefield, 1987. Cap. 4.

LAMONT, O. *Economic tracking portfolios*. Cambridge : National Bureau of Economic Research, Mar. 1999. *Working paper* 7055.

LEITE, H. P., SANVICENTE, A. Z. *Índice Bovespa: um padrão para os investimentos brasileiros*. São Paulo : Atlas, 1994. 140 p.

MARKOWITZ, Harry. M. *Portfolio selection: efficient diversification of investment*. 2. ed. Cambridge, MA : Blackwell, 1991.

POPE, P. F., YADAV, P. K. Discovering errors in tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, v. 20, n. 2, p. 27-32, Winter 1994.

SALOMON BROTHERS. *Index replication strategies: all over again*. Feb. 1995. Relatório técnico.

SHARPE, W. Prof. William Sharpe, Part I. 1999. Disponível em: <<http://www.indexfundonline.com>>.

SHENG, H. H. *Métodos para replicação de índices: revisão e aplicação ao Ibovespa*. Dissertação (Mestrado em Finanças) – Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, 2000.

STERN, Julio M. *Modelos matemáticos para formação de portfólios*. São Paulo, Relatório técnico RT-MAC-9404, 16-03-94, revisão RT-MAC-9510, 31-07-95. MAC-IME-USP, 1995.

VANGUARD. Os materiais institucionais. 1999. Disponível em: <<http://www.vanguard.com>>.